

Cours EDP
ENS PARIS 2^e année
2025 - 2026.

13 ou 14 cours de 2^h30

Partiel semaine du 03/11/25.

Examen semaine du 19/01/26

INTRODUCTION

1) Vocabulaire

Etant donné Ω un ouvert de $\mathbb{R}^m$ (en général $m \geq 2$, mais le cas $m=1$ peut être instructif), on appelle Équation aux dérivées partielles une équation fonctionnelle d'inconnue $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de la forme

$$F(D^k u(x), D^{k-1} u(x), \dots, Du(x), u(x), x) = 0, \quad \forall x \in \Omega$$

où $F: \mathbb{R}^m \times \dots \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est donnée (et $k \in \mathbb{N}^*$)

Remarque: On parle d'EDP linéaire si elle est de la forme

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) = f(x) \quad \forall x \in \Omega$$

où la somme est faite sur les multi-indices

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{N}^m \text{ de taille } |\alpha| = \sum_{i=1}^m \alpha_i \leq k.$$

- L'entier l est l'ordre de l'EDP. On parlera surtout d'EDP d'ordre 1 et 2 dans ce cours.

- On peut généraliser à des systèmes d'EDP lorsque l'inconnue u est à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ avec $m \geq 2$, et alors $F: \mathbb{R}^{m \times l} \times \dots \times \mathbb{R}^{m \times m} \times \mathbb{R}^m \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$.

- Deux situations fréquentes pour Ω :

- $\rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ et on note (x, y) ou $(x, y, z) \in \Omega$

- $\rightarrow \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ et on note $(t, x) \in \Omega$, t est appelé le temps et x la position.

- Si Ω est borné, on peut adjoindre une **condition de bord**, c'est-à-dire que u est définie sur $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ où $\Gamma = \partial\Omega$.

Par exemple, demander $\forall x \in \Gamma, u(x) = \varphi(x)$ où $\varphi: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ est donnée s'appelle une condition de Dirichlet.

Si $\Omega = \mathbb{R}^m$, on peut avoir quelque chose de similaire en imposant des "conditions à l'infini".

- Si $\Omega = [0, T[\times \Omega'$, on peut aussi adjoindre une **condition initiale** de la forme

$\forall x \in \Omega', u(0, x) = u_0(x)$ où $u_0: \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$ est donnée.

2) Un peu d'histoire (voir [Partial Differential Equations in the 20th Century, H. BREZIS, '98])

→ Equation des ondes 1D

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{D'ALEMBERT 1752}$$

et sa généralisation $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u$ où $\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$

(& EULER 1753, BERNOULLI 1762.)

→ Equation de Laplace $\Delta u = 0$ LAPLACE 1780

→ Equation de la chaleur $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$ FOURIER 1810-1822

Ce sont 3 exemples majeurs d'EDP du second ordre respectivement hyperbolique, elliptique et parabolique (+ tend pour les définitions).

→ Quelques autres équations issues des phénomènes physiques:

Equations d'Euler d'écoulement de fluide incompressible 1755

Equation de surfaces minimales LAGRANGE 1760

Equation de Monge-Ampère 1775.

Equation de Poisson (pour les pts électriques et magnétiques)
POISSON 1813, GREEN 1828, GAUSS 1833.

Eg. de Navier-Stokes pour les écoulements de fluide
1822-27 1845.

...
Mais au-delà de l'importance de ces équations pour les applications
(originellement la physique, mais aujourd'hui aussi la biologie,
l'économie etc...), les EDP ont eu une forte importance
dans le développement d'autres sujets mathématiques au 19^e siècle
et jusqu'à aujourd'hui:

→ Premier exemple d'une telle situation: le développement de
l'**ANALYSE COMPLEXE** dans les travaux de **RIEMANN** 1851

à propos de l'équation
$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u = \varphi & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

et de son rapport avec la minimisation de l'intégrale de
Dirichlet $E(v) = \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx$ où $|\nabla v|^2 = \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2$

(la question de preuve rigoureuse d'existence est lancée par
WEIERSTRASS autour de 1870, et dans le cas ci-dessus,
cela s'achève en 1890 par **POINCARÉ**)

→ Programme de Hilbert (1900; 23 problèmes)

Pb 19: Régularité (**Analyticité**)

Pb 20: Existence

(lien avec l'intégrale de LEBESGUE, Observation de LEVI 1906

→ Espaces de Sobolev)

ANALYSE

FONCTIONNELLE

Ordre de l'EDP.

→ Notion de solution faible (moins régulières que C^k a priori)

(Existence de solutions globales aux équations de Navier-Stokes

LERAY 1933

Régularité des solutions en dimension 2 LADYZHENSKAYA 1969

— — — 3 Pb ouverts célèbres (1M\$)

$$(NS) \begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial t} - \nu \Delta u_i + \sum_{j=1}^n u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial p}{\partial x_i} & \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ \operatorname{div} u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{(Equation d'Euler:} \\ \nu = 0) \end{array}$$

($u|_{t=0}$ given)

→ Théorie des distributions SCHWARTZ 1950

[Un mathématicien aux prises avec le siècle, 1997]

Impact sur la théorie de EDP linéaires à coefficients constants

(justification de la notion de solution fondamentale
utilisation de la transformée de Fourier
pas d'hypothèse de régularité)

puis généralisation aux EDP linéaires à coefficients variables.

→ Importance pour la géométrie différentielle.

(Théorie de Hodge)

• Problème de PLATEAU (équation des surfaces minimales)

• Équation de YAMABE 1960 (pour (M, g) variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$, il existe g' métrique conforme à g pour laquelle la courbure scalaire est constante

$$\exists u > 0 \quad -4 \frac{n-1}{n-2} \Delta_g u + R u = K u^{\frac{n+2}{n-2}}$$

$\uparrow$ constante

$\uparrow$ courbure scalaire de g

Argument manquant noté par TRUDINGER

résolu par AUBIN 1975 pour $n \geq 6$

et SCHOEN 1984 pour les derniers cas.

• Flot de RICCI :

$$\begin{cases} \frac{\partial g(t)}{\partial t} = -2 \operatorname{Ric}(g(t)) & \text{HAMILTON 1982} \\ g(0) = g_0 & \forall t \in [0, T[\end{cases}$$

Analyse des singularités PERELMAN 2003

et résolution de la conjecture de POINCARÉ (1904)

3) Objectifs et plan du cours.

Obj1 : Culture générale sur les EDP classiques

Manipulations sur des exemples, et quelques approches plus systématiques

Obj2 : Utiliser, découvrir, approfondir des outils de l'analyse.
via le "prétexte" des EDP.

Plan :

- Partie I : Exemples d'EDP, résolutions dans des cas particuliers, identification de comportements des solutions.
- Partie II : Analyse de quelques classes d'EDP, linéaires et non-linéaires
- Partie III : Approche "généraliste", introduction à l'analyse microlocale.

Références : [EVANS - Partial differential equations 2nd Edition 2010]

pas de modélisation et pas d'analyse numérique.

CHAPITRE 1

Quelques EDP (linéaires) Classiques.

D'où vient le
Laplacien ?

$$u(x \pm h e_i) =$$

$$u(x) \pm h \nabla u(x) \cdot e_i + h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + o(h^2)$$

$$\text{soit } \sum_{i=1}^n u(x \pm h e_i) = 2n u(x) + 2h^2 \Delta u(x) + o(h^2)$$

I) Equations de Laplace et Poisson

$$(L) \Delta u = 0, \quad (P) - \Delta u = f \text{ avec } u: \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{et } \Delta u := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

I.1) Propriété des fonctions harmoniques.

Déf : Une fonction $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2
qui satisfait (L) sur l'ouvert Ω est dite harmonique (sur Ω)

Exemple : • si $n=1$, ce sont des fonctions affines (sur chaque
composante convexe de Ω)

• si $n=2$, les parties réelles et imaginaires d'une fonction holomorphe
sont harmoniques :

En effet si $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe et $P = \operatorname{Re} f$, $Q = \operatorname{Im} f$,
les équations de Cauchy-Riemann donnent :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{d'où}$$

$$\Delta P = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial Q}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[-\frac{\partial Q}{\partial x} \right] = 0 \text{ par le lemme de Schwarz.}$$

INTERLUDE: On a une réciproque partielle

Th Si Ω est simplement connexe dans $\mathbb{C}$, alors toute fonction harmonique sur Ω est la partie réelle d'une fonction holomorphe sur Ω (cf TD)

Rq: Ceci est faux sans l'hypothèse de simple connexité: en effet

$u: z \in \mathbb{C}^* \mapsto \ln|z|$ est harmonique mais n'est pas la partie réelle d'une fonction holomorphe:

- $u(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$ et

$$\Delta u(x, y) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2x}{x^2 + y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{2y}{x^2 + y^2} \right) \right) = \frac{\overbrace{(x^2 + y^2) \cdot 1 - x(2x)}^{y^2 - x^2}}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{\overbrace{(x^2 + y^2) \cdot 1 - y(2y)}^{x^2 - y^2}}{(x^2 + y^2)^2} = 0$$

- Par l'absurde, s'il existe $f: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$ t.q. $u = \operatorname{Re} f$, alors

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, f'(z) = \frac{\partial u}{\partial z} + i \frac{\partial v}{\partial z} \quad (\text{où } v = \operatorname{Im} f)$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} \right] + \frac{i}{2} \left[\frac{\partial v}{\partial x} - i \frac{\partial v}{\partial y} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right] + \frac{i}{2} \left[-\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right]$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{1}{z}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

mais ceci est une contradiction ($z \mapsto \frac{1}{z}$ n'a pas de primitive sur $\mathbb{C}^*$,
 sinon on aurait $\int_{\partial D(0,1)} \frac{1}{z} dz = 0$)

Preuve du Théorème: Soit Ω simplement connexe $\subset \mathbb{C}$ et $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

harmonique. La fonction $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_P - i \underbrace{\frac{\partial u}{\partial y}}_Q \right)$ est holomorphe car

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial Q}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$$

et comme Ω est simplement connexe, il existe $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe
 telle que $f' = 2 \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}$.

Mais alors
$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} [\operatorname{Re} f - u] = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + \underbrace{\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}}_{=0} - 2 \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \right] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} [\operatorname{Re} f - u] = \frac{1}{2} \left[\underbrace{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}}_{\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}} - 2 \underbrace{\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}}_{\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}} \right] = 0$$

et donc par connexité de Ω ,

$\operatorname{Re} f - u$ est constante, donc u est bien partie réelle
 d'une fonction holomorphe □

→ TD

Rq : C'est donc toujours vrai localement, c'est-à-dire sur $D(z_0, r)$ un disque inclus dans Ω .

• En conséquence, les fonctions harmoniques supposées C^2 sur Ω ouvert de $\mathbb{R}^2$ sont en fait C^∞ (et même analytiques)

→ il y a un principe de prolongement analytique
(si toutes les dérivées de u s'annulent en $z_0 \in \Omega$, alors $u \equiv 0$)

→ un principe du maximum
(si u, v harmoniques sur Ω et continues sur $\overline{\Omega}$ avec $u = v$ sur $\partial\Omega$
alors $u = v$ sur $\overline{\Omega}$)

→ il y a une formule de Cauchy qui
s'appelle formule de Poisson si on se met sur un disque

→ il y a des inégalités de Cauchy
(contrôle des dérivées de u par u sur un ouvert un
peu plus gros)

→ une limite ^{localement} uniforme de fonctions harmoniques
est harmonique

→ et une propriété de compacité.

Pour tout ceci [AMAR-MATHERON Analyse complexe].

FIN de l'INTERLUDE

Th (Formule de la moyenne)

Si $u \in C^2(\Omega)$ est harmonique, alors pour tout $\overline{B}(x, r) \subset \Omega$,

$$u(x) = \int_{\partial B(x, r)} u(s) d\sigma(s) = \int_{B(x, r)} u(y) dy$$

INTERLUDE Intégrale surfacique, formule de GREEN, IPP sur $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

§C.1 & C.2
in EVANS.

• Si Γ est une sous-variété de classe C^1

de $\mathbb{R}^m$ de dimension $n-1$, Γ est localement et dans un système de coordonnées le graphe d'une fonction, i.e.

pour tout $x \in \Gamma$ il existe $\varepsilon > 0$, $(e_1, \dots, e_m)$ base de $\mathbb{R}^m$, V ouvert de $\mathbb{R}^{m-1}$ et $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}$ t.q.

$$\Gamma \cap B(x, \varepsilon) = \left\{ \sum_{i=1}^{m-1} x_i e_i + \varphi(x') e_m, x' = (x_1, \dots, x_{m-1}) \in V \right\}$$

et alors l'espace tangent à Γ est de dimension $n-1$

et on peut définir $v(x', \varphi(x')) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla \varphi(x')|^2}} \begin{pmatrix} \partial_1 \varphi(x') \\ \vdots \\ \partial_{m-1} \varphi(x') \\ -1 \end{pmatrix}$

vecteur normal à Ω en $(x', \varphi(x'))$.

et on définit alors si $\text{supp } \psi \subset B(x, \varepsilon)$

$$\int_{\Gamma} \psi(s) d\sigma(s) = \int_V \psi \left[\sum_{i=1}^{m-1} x_i e_i + \varphi(x') e_m \right] \sqrt{1 + |\nabla_x \varphi(x')|^2} dx_1 \dots dx_{m-1}$$

et grâce à une partition de l'unité on peut étendre cette définition à tout $\psi: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ "raisonnable".

• Si Ω est un ouvert de classe C^1 de $\mathbb{R}^m$, i.e.

$\partial\Omega$ est localement le graphe d'une fonction C^1 et

Ω est d'un côté de ce graphe, alors on peut montrer la formule de la divergence : pour $X: \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} X dx = \int_{\partial\Omega} X \cdot \underline{\underline{v}} \quad \text{où } v \text{ est la normale } \underline{\underline{\text{extérieure à } \Omega}}.$$

Corollaires :

$$\bullet \int_{\Omega} f \operatorname{div} X = \int_{\partial\Omega} f X \cdot v - \int_{\Omega} \nabla f \cdot X$$

$$\bullet \int_{\Omega} u \Delta v = \int_{\partial\Omega} u \partial_{\underline{\underline{v}}} v - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \quad \text{où} \quad \partial_{\underline{\underline{v}}} v := \nabla v \cdot \underline{\underline{v}}$$

$$\bullet \int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) = \int_{\partial\Omega} u \partial_{\underline{\underline{v}}} v - v \partial_{\underline{\underline{v}}} u$$

Plus de détail dans [BONY Cours d'analyse, théorie des distributions et analyse de Fourier] FIN INTERLUDE

Preuve formule de la moyenne: Soit $x_0 \in \Omega$ et $r > 0$ tq $\overline{B(x_0, r)} \subset \Omega$

• On pose $\phi(r) = \int_{\partial B(x_0, r)} u(y) d\sigma(y) = \frac{1}{r^{n-1} |\partial B(0, 1)|} \int_{\partial B(x_0, r)} u(y) d\sigma(y)$

INTERLUDE
coordonnées polaires
EVANS C.3.

$$= \frac{1}{r^{n-1} |\partial B(0, 1)|} \int_{\mathbb{S}(0, 1)} u(x_0 + r\omega) \cancel{r^{n-1}} d\sigma(\omega)$$

$y = x_0 + r\omega$

$y = x + r\omega$

Ainsi ϕ est dérivable et $\phi'(r) = \int_{\mathbb{S}(0, 1)} Du(x_0 + r\omega) \cdot \omega d\sigma(\omega)$

$$= \frac{1}{|\mathbb{S}(0, 1)|} \int_{\partial B(x_0, r)} Du(y) \cdot \underbrace{\frac{y - x_0}{r}}_v \frac{d\sigma(y)}{r^{n-1}} = \frac{1}{|\partial B(x_0, r)|} \left[\int_{\partial B(x_0, r)} 1 \cdot \Delta u + \underbrace{\int_{\partial B(x_0, r)} \nabla 1 \cdot \nabla u}_{=0} \right]$$

$= 0$

et donc ϕ est constante et $\phi(r) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \phi(t) = u(x_0)$ (par continuité de u en x_0)

• De plus, $\int_{B(x_0, r)} u(y) dy = \int_0^r \int_{\mathbb{S}(0, 1)} u(x_0 + \omega s) s^{n-1} d\omega ds$

Le Th
admet une

réciprocité, avec
des calculs similaires.

$$= \int_0^r \left(\int_{\partial B(x_0, s)} u(s) d\sigma(s) \right) ds = u(x_0) \int_0^r \int_{\partial B(x_0, s)} 1 d\sigma(s) ds$$

$$= u(x_0) |B(x_0, r)|.$$

□

Th (Principe du maximum "fort")

Soit $u \in C^2(\Omega)$ harmonique sur Ω .

Alors si Ω est convexe et il existe $x_0 \in \overline{\Omega}$ tq $u(x_0) = \max_{\Omega} u$

alors u est constante.

Rq: • ça marche avec min au lieu de max.

• si Ω est borné on a $\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$ (principe du maximum faible)

Ceci suit du théorème précédent: en effet comme Ω est borné, il existe $x_0 \in \Omega$ tq $u(x_0) = \sup_{\overline{\Omega}} u$: si $x_0 \in \partial\Omega$ alors on a la formule, et si $x_0 \in \Omega$ alors u est constante sur sa composante convexe et on a encore la formule.

• Ainsi $\forall x \in \Omega$, $\inf_{\partial\Omega} u \leq u(x) \leq \sup_{\partial\Omega} u$ (si Ω borné)

Preuve: On pose $M = \sup_{\Omega} u$. Soit $x_0 \in \Omega$ tq $u(x_0) = M$.

Alors pour tout $r \in]0, d(x_0, \partial\Omega)[$, la propriété de la moyenne

implique $M = u(x_0) = \int_{B(x_0, r)} u \, dy \leq M$

Il y a donc égalité dans ces inégalités, d'où $u \equiv M$ sur $B(x_0, r)$

Ainsi l'ensemble $\{x \in \Omega, u(x) = M\}$ est fermé (dans Ω) par

continuité de u et ouvert par l'argument précédent. Par

convexité de Ω , cet ensemble est $\emptyset$ ou Ω , et dans ce dernier

cas u est constante.

□

Def : on dit que $u \in C^2(\Omega)$ est sous-harmonique sur Ω si

$$-\Delta u \leq 0$$

Dans ce cas u est sous ses moyennes ($u(x) \leq \int_{B(x,r)} u(y) dy$)
et n'a pas de maximum dans Ω sauf si elle est constante.

HINT : pour retrouver le sens, on peut voir $\Delta u \geq 0$
comme une condition affaiblie de convexité.

et si $-\Delta u \geq 0$, u n'a pas de minimum.

Th (Régularité) soit $u \in C^0(\Omega)$ qui satisfait la propriété de la moyenne $u(x) = \int_{B(x,r)} u(y) dy$ pour toute boule $B(x,r) \subset \Omega$

Alors $u \in C^\infty(\Omega)$.

Def : Cela s'applique donc aux fonctions $u \in C^2(\Omega)$ harmoniques.

Preuve Soit (ρ_ε) une famille régularisante de la forme INTERLUDE?
§C.5 in EVANS

$$\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \varphi\left(\frac{|x|}{\varepsilon}\right) \text{ avec } \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}_+) \text{ et } \text{supp } \varphi \subset [0,1]$$

On peut définir $u_\varepsilon = \rho_\varepsilon * u$ sur $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega, d(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$

Par propriété classique $u_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$.

On va montrer qu'en fait $u_\varepsilon \equiv u$ sur Ω_ε , ce qui permet de conclure.

$\mathbb{E}_m$ effet
 $\forall x \in \Omega_\varepsilon$,

$$u_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^m} \int_{B(x, \varepsilon)} \varphi\left(\frac{|y-x|}{\varepsilon}\right) u(y) dy$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^m} \int_0^\varepsilon \varphi\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) \left(\int_{\partial B(x, r)} u(y) d\sigma(y) \right) dr$$

$$= u(x) \int_{\partial B(x, r)} 1 d\sigma(y)$$

$$= u(x) \int_{B(x, \varepsilon)} \rho_\varepsilon dy = u(x) \quad \square$$

On peut être plus précis et estimer les dérivées de u par u

Th Soit u harmonique sur Ω . Alors pour toute $B(x_0, r) \subset \Omega$ et α multi-indice d'ordre $h \in \mathbb{N}$

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{C_{h,m}}{r^{m+h}} \|u\|_{L^1(B(x_0, r))}$$

$$\text{ou } C_{h,m} = \frac{[2^{m+1} m^h]}{\omega_m}$$

volume of the unit ball in $\mathbb{R}^m$. (Rem: $|B(0,1)| = m \omega_m$)

cf **INTERLUDE**

Pg: On peut en déduire que u harmonique est analytique (voir [EVANS p 31]) en montrant que le développement de Taylor converge et que le reste tend vers 0.

- On peut en déduire le th de Liouville qui dit que si u est harmonique sur $\mathbb{R}^m$ et bornée alors u est constante

$$\forall x_0 \forall r, |Du(x_0)| \leq \frac{C_1}{r^{m+1}} \|u\|_{L^1(B(x_0, r))} \leq \underbrace{\frac{C_1}{r^{m+1}} |B(x_0, r)|}_{\frac{C}{r}} \|u\|_{L^\infty} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$$

Preuve: • $k=0$ suit de la formule de la

moyenne puisque $|u(x_0)| = \left| \int_{B(x_0, r)} u \right| \leq \frac{1}{r^m \omega_m} \|u\|_{L^1(B(x_0, r))}$

- $k=1$: $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ is harmonic so

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_0) \right| &= \left| \int_{B(x_0, \frac{r}{2})} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| = \frac{1}{|B(x_0, \frac{r}{2})|} \left| \int_{B(x_0, \frac{r}{2})} \nabla u \cdot e_i \right| = \frac{1}{|B(x_0, \frac{r}{2})|} \left| \int_{\partial B(x_0, \frac{r}{2})} u \cdot \nu_i \right| \\ &\leq \frac{|\partial B(x_0, \frac{r}{2})|}{|B(x_0, \frac{r}{2})|} \|u\|_{L^\infty(\partial B(x_0, \frac{r}{2}))} \leq \underbrace{\frac{m}{\frac{r}{2}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{r}{2}\right)^m \omega_m}}_{C_1 = \frac{2^{m+1} m}{\omega_m r^{m+1}}} \|u\|_{L^1(B(x_0, r))} \end{aligned}$$

Gradient de $x \mapsto x$: $C_0 = \frac{1}{\omega_m} \checkmark$

- On suppose $k \geq 2$ et la formule est valide pour tout α tq $|\alpha| \leq k-1$:
Soit α tq $|\alpha| = k$: alors il existe β et i tq $|\beta| = k-1$ et $D^\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_i}(D^\beta u)$

Comme ci-dessus, on observe que $D^\alpha u$ est harmonique et donc

$$\begin{aligned} |D^\alpha u(x_0)| &= \left| \int_{B(x_0, \frac{r}{k})} \frac{\partial}{\partial x_i}(D^\beta u) \right| = \frac{1}{|B(x_0, \frac{r}{k})|} \left| \int_{\partial B(x_0, \frac{r}{k})} D^\beta u \cdot \nu_i \right| \leq \frac{km}{r} \|D^\beta u\|_{L^\infty(\partial B(x_0, \frac{r}{k}))} \\ &\leq \frac{mk}{r} \cdot \frac{C_{k-1} \cdot \frac{2^{m+1} m(k-1)}{\omega_m} \cdot \frac{1}{\left(\frac{r}{k}\right)^{m+k-1}}}{\left[\left(1 - \frac{1}{k}\right)r\right]^{m+k-1}} \|u\|_{L^1(B(x_0, r))} \leq \frac{\left[2^{m+1} m(k-1)\right]^{k-1} \cdot mk}{\left(\frac{k-1}{k}\right)^{m+k-1}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{r}{k}\right)^k} \|u\|_{L^1(B(x_0, r))} \end{aligned}$$

INTERLUDE

Une fonction C^∞ est-elle analytique?

Observons que si u est DSE en x_0 , alors nécessairement
sm DSE est $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^m} \frac{D^\alpha u(x_0)}{\alpha!} (x-x_0)^\alpha$ ($\alpha! := \alpha_1! \dots \alpha_m!$
 $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_m^{\alpha_m}$)

Obstacle 1: le rayon de crg de cette série est nul:

par exemple par le th de Borel, il existe $u \in C^\infty(\mathbb{R})$ t_z
 $\forall m \in \mathbb{N}, u^{(m)}(0) = (m!)^2$.

Obstacle 2: le rayon de crg est non nul mais u et
sa série de Taylor diffèrent

Par exemple $x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

Pour lever les obstacles, on doit avoir des conditions
de croissance sur $D^\alpha u$ de sorte que

- la série de Taylor ait un rayon de crg non nul
- le reste dans la formule de Taylor reste intégral
crg vers 0.

Fin de l'INTERLUDE

I.2) Éléments sur les EDPs de LAPLACE et POISSON

On cherche à "résoudre" les EDP avec conditions de bord suivante :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{sur } \Omega \\ u = \varphi & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad \text{et plus généralement} \quad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{sur } \Omega \\ u = \varphi & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

et à analyser le comportement des solutions. (f, φ) donnés.

On les appelle "pb de Dirichlet" pour les équations de Laplace et Poisson

Th On suppose Ω borné, $f \in C^0(\Omega)$, $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$.

• Si $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ satisfait $\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{sur } \Omega \\ u = \varphi & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$
et $\begin{cases} \Omega \text{ convexe} \\ \varphi \geq 0, \varphi \not\equiv 0 \end{cases}$, alors $u > 0$ sur Ω

• Il y a unicité des solutions de $\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = \varphi & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$

Preuve : • On a $u \geq \inf_{\partial\Omega} u$ par le principe faible du max.
donc $u \geq 0$.

Par l'absurde : si il existe x_0 t.q. $u(x_0) = 0$, alors

$u(x_0) = \inf_{\Omega} u$ mais alors par le principe fort

du max, u est nul, et φ aussi, ce qui est une contradiction

- Si u et v sont solutions,
 $u-v$ est harmonique et nulle au bord, donc nulle
 par le principe du maximum fort □

Rq: Ça ne marche pas si Ω n'est pas borné
 (prendre la sol. fondamentale des Laplaciens + $C^{\frac{1}{2}}$
 sur le complémentaire d'une boule)
 il faudrait ajouter des conditions à l'infini.

Th (Principe de Dirichlet)

Soit Ω ouvert borné $f \in C^0(\bar{\Omega})$, $\varphi \in C^2(\partial\Omega)$. On pose

$$\forall w \in C^2(\bar{\Omega}), \quad I(w) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla w|^2 - f w \right)$$

- si $u \in C^2(\bar{\Omega})$ résout
$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ sur } \Omega \\ u = \varphi \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

$$\text{alors} \quad I(u) = \min \left\{ I(w), w \in C^2(\bar{\Omega}) \mid w = \varphi \text{ sur } \partial\Omega \right\}$$

- Réciproquement si $u \in C^2(\bar{\Omega})$ satisfait

$$I(u) = \min \left\{ I(w), w \in C^2(\bar{\Omega}) \mid w = \varphi \text{ sur } \partial\Omega \right\} \quad \text{alors} \quad \begin{cases} -\Delta u = f \text{ sur } \Omega \\ u = \varphi \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Pruve: • soit $w \in C^2(\bar{\Omega})$ tq $w = \varphi$ sur $\partial\Omega$.

On a $-\Delta u = f$ sur Ω donc $(-\Delta u)w = fw$ sur Ω
et on intègre :

$$\int_{\Omega} (-\Delta u) w = \int_{\Omega} f w$$

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w - \int_{\partial\Omega} (\partial_n u) \underbrace{(\varphi)}_w$$

i.e. $\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w - \int_{\Omega} f w$ ne dépend pas de w , i.e.

$$\begin{aligned} \int |\nabla u|^2 - f u &= \int \nabla u \cdot \nabla w - f w \\ &\leq \int \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{2} |\nabla w|^2 - f w \end{aligned}$$

$$\text{d'où } I(u) \leq I(w)$$

• Réciproquement, si u est sol du pb d'optimisation,
on se donne $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$I(u + t\varphi) \geq I(u)$$

mais $I(u+t\psi) = I(u) + t\left(\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \psi - \psi f\right) + \frac{t^2}{2} \int |\nabla \psi|^2$
 donc par condition d'optimalité,

$$\int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla \psi - \psi f) = 0$$

$$\int_{\Omega} (\Delta u) \psi - f \psi + \underbrace{\int_{\partial \Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \psi}_{=0} = 0$$

donc par résultat classique d'intégration, $-\Delta u = f$ sur Ω $\square$

Rq: Dans le cas $f=0$, ⁽¹⁹⁵¹⁾ Riemann utilise ce résultat pour affirmer l'existence d'une solution $u \in C^2(\bar{\Omega})$ au pb de Dirichlet:

Critique 1: des fonctionnelles apparemment similaires à l'énergie de Dirichlet n'ayant pas de minimum.

Critique 2: (Poincaré 1871) il existe $\varphi \in C^0(\mathbb{S}^1)$ telle qu'il n'existe pas w tq $w = \varphi$ sur $\partial \Omega$
 $I(w) < +\infty$.

$\leadsto$ Dvpt d'analyse fonctionnelle fin 19^e
 et début 20^e (LEVI 1906: une suite minimisante de I est de Cauchy pour "norme Dirichlet" + Lebesgue $\leadsto$ Sobolev!)

I.3) Formule de représentation.

Recherche de la solution fondamentale du Laplacien:

On cherche u radiale (invariante par rotation de l'équation de Laplace) [c'est-à-dire qu'il existe

$$v:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \quad \text{t.q.} \quad \forall x \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}, u(x) = v(\underbrace{|x|}_r)]$$

et harmonique.

On a dans ce cas $\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket$,

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = v'(|x|) \cdot \frac{x_i}{|x|}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x) = v''(|x|) \cdot \left(\frac{x_i}{|x|}\right)^2 + v'(|x|) \cdot \left(\frac{1}{|x|} - \frac{x_i^2}{|x|^3}\right)$$

$$\text{d'où } \Delta u(x) = v''(|x|) \cdot 1 + v'(|x|) \frac{m-1}{|x|}$$

Ainsi on cherche v t.q. $v''(r) + \frac{m-1}{r} v'(r) = 0 \quad \forall r \in]0, +\infty[.$

$$\text{ie } v'(r) = 2 \exp\left[-\int_1^r \left(\frac{m-1}{s}\right) ds\right]$$

$$= 2 \exp\left[-(m-1) \ln r\right] = \frac{2}{r^{m-1}} \text{ pour } 2 \in \mathbb{R}$$

i.e.

$$v(r) = \begin{cases} 2\pi + \alpha & \text{si } n=1 \\ 2 \ln r + \alpha & \text{si } n=2 \\ \frac{2}{r^{n-2}} + \alpha & \text{si } n \geq 3. \end{cases}$$

Def: La fonction $\Phi: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} -\frac{1}{2} |x| & \text{si } n=1 \\ -\frac{1}{2\pi} \ln |x| & \text{si } n=2 \\ \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \frac{1}{|x|^{n-2}} & \text{si } n \geq 3 \end{cases}$$

 est appelée solution fondamentale du Laplacien
 de l'équation de Laplace

(ω_n est le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1+\frac{n}{2})}$)

Rq: On expliquera le choix de constante à l'énoncé suivant.

(On constate les estimations (si $n \geq 2$)

$$|D\Phi(x)| \leq \frac{C}{|x|^{n-1}}, \quad |D^2\Phi(x)| \leq \frac{C}{|x|^n} \quad \forall x \neq 0.$$

TL Soit $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ (pour simplifier). On définit

$$u: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y) dy = \Phi * f(x)$$

Alors $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ et $-\Delta u = f$ sur $\mathbb{R}^n$.

Rq: attention on ne peut pas écrire (dans ce contexte)

$$\Delta(\Phi * f) = (\Delta \Phi) * f = 0 \text{ car } \Delta^2 \Phi \text{ n'est pas}$$

intégrable au voisinage de 0.

Preuve: • Par propriétés usuelles de la convolution, $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$

$$\text{et } \frac{\partial u}{\partial x_i} = \Phi * \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \Phi * \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

$$\bullet \Delta u(x) = \Phi * \Delta f = \underbrace{\int_{B(0,\varepsilon)} \Phi(y) \Delta f(x-y) dy}_{I_\varepsilon} + \underbrace{\int_{B(0,\varepsilon)^c} \Phi(y) \Delta f(x-y) dy}_{J_\varepsilon}.$$

$$\text{et } |I_\varepsilon| \leq C \|\Delta f\|_\infty \cdot \int_{B(0,\varepsilon)} |\Phi| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \quad (\Phi \text{ intégrable en } 0)$$

$$\bullet J_\varepsilon = - \underbrace{\int_{B(0,\varepsilon)^c} \nabla \Phi(y) \cdot \nabla f(x-y) dy}_{K_\varepsilon} + \underbrace{\int_{\partial B(0,\varepsilon)} \partial_\nu f(x-y) \Phi(y) d\sigma(y)}_{L_\varepsilon}$$

$$\text{et } |L_\varepsilon| \leq \|Df\|_\infty \int_{\partial B(0,\varepsilon)} |\Phi| d\sigma \leq \begin{cases} C\varepsilon & \text{si } m=1 \\ C\varepsilon \ln \varepsilon & \text{si } m=2 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \\ C\varepsilon & \text{si } m \geq 3 \end{cases}$$

$$\bullet \text{ En fin } K_\varepsilon = \underbrace{\int_{B(0,\varepsilon)^c} \Delta \Phi(y) \cdot f(x-y) dy}_{=0} - \int_{\partial B(0,\varepsilon)} \partial_\nu \Phi(y) f(x-y) d\sigma(y)$$

$$\text{mais } \begin{cases} \Delta \Phi(y) = \frac{-1}{m \omega_m} \frac{y}{|y|^m} & \forall y \neq 0 \\ \nu(y) = -\frac{y}{|y|} = -\frac{y}{\varepsilon} & \forall y \in \partial B(0,\varepsilon) \end{cases}$$

$\frac{1}{2\pi} \ln|x| = -\frac{1}{4\pi} \ln|x|^2$
 $\partial_i = -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{2x_i}{|x|^2}$
 $\nabla = -\frac{1}{2\pi} \frac{x}{|x|^2}$
 $2\omega_2 = 2\pi$

$$\text{d'où } \partial_\nu \Phi(y) = \frac{1}{m \omega_m \varepsilon^{m-1}} = \frac{1}{|\partial B(0,\varepsilon)|}$$

$$\text{et donc } K_\varepsilon = - \int_{\partial B(x,\varepsilon)} f d\sigma(y) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -f(x) \quad \square$$

Rq: En fait on peut donner sens à :

$-\Delta \Phi = \delta_0$ au sens des distributions sur $\mathbb{R}^m$, et

alors $-\Delta(\Phi * f) = \delta_0 * f = f$. On verra

ça-dessus plus tard.

[À Ajouter : régularité intérieure pour $-\Delta u = f$
cf BETHUEL.]

Soit maintenant $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ ouvert de classe C^1 .

On cherche une formule de représentation de $\begin{cases} -\Delta u = f \text{ sur } \Omega \\ u = \varphi \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$

Heuristique: $u \in C^2(\overline{\Omega})$, $x \in \Omega$, $B(x, \varepsilon) \subset \Omega$:

par formule de Green sur $\Omega \setminus B(x, \varepsilon)$,

$$\int_{\Omega \setminus B(x, \varepsilon)} \cancel{\mu(y) \Delta \Phi(x-y)} - \Delta u(y) \cdot \Phi(x-y) = \int_{\partial[\Omega \setminus B(x, \varepsilon)]} [\mu(y) \partial_\nu \Phi(y-x) - \Phi(y-x) \partial_\nu u(y)] d\sigma(y)$$

$$\text{avec } \int_{\partial B(x, \varepsilon)} \Phi(y-x) \partial_\nu u(x) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

$$\int_{\partial B(x, \varepsilon)} \mu(y) \partial_\nu \Phi(y-x) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mu(x)$$

d'où la formule :

$$\mu(x) = - \int_{\Omega} \underbrace{\Delta u(y)}_{\text{connu}} \cdot \Phi(x-y) + \int_{\partial\Omega} [\underbrace{\Phi(y-x)}_{\text{connu}} \underbrace{\partial_\nu u(y)}_{\text{inconnu}} - \underbrace{\mu(y)}_{\text{connu}} \partial_\nu \Phi(y-x)] d\sigma$$

Déf : Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$.

- pour tout $x \in \Omega$, on appelle ϕ^x correcteur une fct telle que

$$\begin{cases} \Delta \phi^x = 0 & \text{sur } \Omega \\ \phi^x = \Phi(\cdot - x) & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

- On pose alors $\forall x, y \in \Omega, x \neq y$,

$$G(x, y) = \Phi(y - x) - \phi^x(y)$$

et on appelle G fonction de Green du domaine Ω .

Th

Si $u \in C^2(\bar{\Omega})$ est sol de
$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{sur } \Omega \\ u = \varphi & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

alors $\forall x \in \Omega, u(x) = - \int_{\partial\Omega} \varphi(y) \partial_\nu G(x, y) d\sigma + \int_{\Omega} f(y) G(x, y) dy$

Preuve : On a vu ci-dessus,

$$u(x) = \int_{\Omega} f(y) \Phi(x - y) dy + \int_{\partial\Omega} \Phi(y - x) \partial_\nu u(y) - \int_{\partial\Omega} \varphi(y) \partial_\nu \Phi(x - y)$$

mais on a aussi
$$\int_{\Omega} \Delta \phi^x \cdot u - \phi^x \Delta u = \int_{\partial\Omega} u \partial_\nu \phi^x - \underbrace{\phi^x \partial_\nu u}_{\Phi(y-x)}$$

$$\text{et donc } u(x) = \int_{\Omega} f(y) \underbrace{[\Phi(x - y) - \phi^x(y)]}_{G(x, y)} - \int_{\partial\Omega} \varphi(y) \underbrace{[\partial_\nu \Phi(x - y) - \partial_\nu \phi^x(y)]}_{\partial_\nu G(x, y)}$$

□

Rq. En fait on a $\forall x, \int_{\Omega'} -\Delta_y G = \delta_x$ sur Ω

$$\begin{cases} G = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

- On peut montrer que $\forall x, y, G(x, y) = G(y, x)$
- On peut identifier G explicitement pour $\Omega = \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}_+$ et pour $\Omega = B(0, 1)$

Par exemple si $\Omega = B(0, 1)$, on en déduit que

si $\varphi \in C^0(\partial B(0, 1))$, alors $u(x) := \frac{1 - |x|^2}{m \omega_m} \int_{\partial B(0, 1)} \frac{\varphi(y)}{|x - y|^m} d\sigma(y)$

satisfait

$$\rightarrow u \in C^\infty(B(0, 1))$$

$$\rightarrow \Delta u = 0 \text{ sur } B(0, 1)$$

$$\rightarrow \forall x_0 \in \partial B(0, 1), \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in B(0, 1)}} u(x) = \varphi(x_0).$$

Conclusion L'équation de Poisson

- satisfait un principe de comparaison, et il y a unicité (si D bon)
- a un effet régularisant (constaté seulement dans le cas $f=0$)
- a un lien à clarifier avec $\min \left\{ \frac{1}{2} \int |\nabla u|^2 - \int f u, u = \varphi \text{ sur } \partial\Omega \right\}$
- on n'a pas prouvé l'existence sauf pour des cas particuliers de Ω pour lesquels on peut voir la solution via une convolution.

II) Équation de la chaleur

On s'intéresse désormais à l'équation

$$(T \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\})$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f & \text{sur } [0, T[\times \Omega \\ + \text{Condition de bord} & \forall t \in [0, T[, \forall x \in \partial\Omega, u(t, x) = \varphi \\ + \text{Condition initiale} & \forall x \in \bar{\Omega}, u(0, x) = u_0(x). \end{cases}$$

On parle
(d'équation homogène)
si $f \equiv 0$

peut
dépendre
de t .

II.1) Cas des conditions périodiques.

On se place sur $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, i.e. conditions périodiques

i.e. $u: [0, T[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ t_y $\forall t \in [0, T[, u(t, \cdot)$ est 2π -périodique

HEURISTIQUE

- Recherche des solutions à variables séparées :

$$u(t, x) = v(t) w(x)$$

Alors $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ devient

$$\frac{v'(t)}{v(t)} = \frac{w''(x)}{w(x)} \quad \text{donc il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ t_y }$$

$$v' = \lambda v \quad \text{et} \quad w'' = \lambda w \quad \text{avec } w \text{ } 2\pi\text{-périodique}$$

L'équation caractéristique $\pi^2 = \lambda$ a pour solutions $\begin{matrix} \pm \sqrt{\lambda} & \text{si } \lambda \geq 0 \\ \pm i\sqrt{|\lambda|} & \text{si } \lambda < 0 \end{matrix}$

si $\lambda > 0$ il n'y a pas de w périodique (autre que $w=0$)
 si $\lambda = 0$, les sol périodiques sont les constantes.
 et si $\lambda < 0$, $w(x) = \alpha e^{i\sqrt{|\lambda|}x} + \beta e^{-i\sqrt{|\lambda|}x}$

et la condition $w(0) = w(2\pi)$ donne $\alpha + \beta = \alpha e^{2i\pi\sqrt{|\lambda|}} + \beta e^{-2i\pi\sqrt{|\lambda|}}$

et $w'(0) = w'(2\pi)$ donne

$$i\sqrt{|\lambda|}(\alpha - \beta) = i\sqrt{|\lambda|}(\alpha e^{2i\pi\sqrt{|\lambda|}} - \beta e^{-2i\pi\sqrt{|\lambda|}})$$

d'où (somme) $2\alpha = 2\alpha e^{2i\pi\sqrt{|\lambda|}}$

et (différence) $2\beta = 2\beta e^{-2i\pi\sqrt{|\lambda|}}$

donc $e^{2i\pi\sqrt{|\lambda|}} = 1$
 (si on veut une sol non triviale)

Nécessairement il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel $\lambda = -m^2$

et alors $u(t, x) = \alpha \exp(-m^2 t) e^{imx}$

• On peut faire des combinaisons linéaires de ce type

de solutions et donc $(t, x) \mapsto \sum_{n=-N}^N \alpha_n e^{-n^2 t} e^{inx}$

sont solutions périodiques de l'EDP avec

la condition $u(0, x) = \sum_{n=-N}^N \alpha_n e^{inx}$

d'où la question posée par Fourier : peut-on approcher toute fonction u_0 2 π -périodique par une série trigonométrique?

Fim HEURISTIQUE

Th: Soit $u_0 \in L^1(\mathbb{S}^1)$. On pose

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^1 \quad u(t, x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{u}_0(m) e^{-m^2 t} e^{imx}$$

$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} u_0(t) e^{-imt} dt$

Alors $u \in C^\infty([0, +\infty[\times \mathbb{S}^1)$ et $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ sur $]0, +\infty[\times \mathbb{S}^1$

- si $u_0 \in C^1(\mathbb{S}^1)$ alors $u(t, \cdot) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{L^\infty} u_0$
et u est une solution classique au sens où
 $u \in C^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^1)$
- si $u_0 \in L^2(\mathbb{S}^1)$ alors $u(t, \cdot) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{L^2} u_0$

Preuve: • $\left| \frac{\partial^h}{\partial t^h} \frac{\partial^l}{\partial x^l} \hat{u}_0(m) e^{-m^2 t} e^{imx} \right| \leq \|u_0\|_{L^1} \cdot |m|^{2h+l} e^{-m^2 t} \quad \forall t \geq \varepsilon$

donc il y a CVN sur $[\varepsilon, +\infty[\times \mathbb{S}^1$ donc u est C^∞ sur $]0, +\infty[\times \mathbb{S}^1$ et

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} u = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{u}_0(m) \left[-m^2 - (im)^2 \right] e^{-m^2 t} e^{imx} = 0$$

- si $u_0 \in C^1(S^1)$ alors $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{u}_0(n)| < +\infty$ ($|\hat{u}_0(n)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} |\hat{u}_0(n)|$)
 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \in \ell^2$ $\hat{u}_0(n) \in \ell^2$

et donc $u \in C^0(\mathbb{R}_+ \times S^1)$ et

$$\|u(t, \cdot) - u_0\|_\infty \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{u}_0(n)| \cdot |e^{-n^2 t} - 1| \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0.$$

- si $u_0 \in L^2(S^1)$ alors $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{u}_0(n)|^2 < +\infty$

$$\|u(t, \cdot) - u_0\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{u}_0(n)|^2 |e^{-n^2 t} - 1|^2 \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 \quad \text{cvg dominée } \ell^2 \quad \square$$

Rq: On peut améliorer le résultat précédent et montrer

que si $u_0 \in C^0(S^1)$ alors $u: (t, x) \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{u}_0(n) e^{-n^2 t} e^{inx}$ est bien défini sur $]0, +\infty[\times S^1$ et satisfait $u(t, \cdot) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{L^\infty} u_0$

Pour cela on constate

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{u}_0(n) e^{-n^2 t} e^{inx} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} u_0(\theta) e^{-in\theta} \frac{d\theta}{2\pi} \right) e^{-n^2 t} e^{inx}$$

$$\stackrel{\rightarrow TD}{=} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-n^2 t} \cdot e^{in(x-\theta)} \right] u_0(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} = p(t, \cdot) * u_0(x)$$

avec $p(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-n^2 t} e^{inx}$ mais par la formule de Poisson

$$p(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\frac{(x + 2n\pi)^2}{4t}} \quad \text{ce qui permet de montrer}$$

que $(p(t, \cdot))_{t>0}$ est une approximation de l'unité (périodique)

et donc $p(t, \cdot) * u_0 \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} u_0.$

Détails : • pour la réécriture de p , on peut constater que la 2nde formule définit (pour $t > 0$ fixé) une fonction continue & périodique et ayant les mêmes coeff de Fourier : en effet

$$\int_{-\bar{u}}^{\bar{u}} \left(\frac{\sqrt{\bar{u}}}{t} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{(x+2m\bar{u})^2}{4t}} \right) e^{-ihx} \frac{dx}{2\bar{u}} = \sqrt{\frac{\bar{u}}{t}} \cdot \frac{1}{2\bar{u}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{-\bar{u}+2m\bar{u}}^{\bar{u}+2m\bar{u}} e^{-\frac{(x+2m\bar{u})^2}{4t}} e^{-ihx} dx$$

$$= \sqrt{\frac{\bar{u}}{t}} \cdot \frac{1}{2\bar{u}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{4t}} e^{-ihx} dx = \sqrt{\frac{\bar{u}}{t}} \cdot \frac{1}{2\bar{u}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-ihx\sqrt{2t}} \sqrt{2t} dx$$

$$= \sqrt{\frac{\bar{u}}{t}} \cdot \frac{1}{2\bar{u}} \cdot \sqrt{2t} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x+ih\sqrt{2t})^2} \cdot e^{-\frac{1}{2}h^2 2t} dx$$

$$= \left(\sqrt{\frac{\bar{u}}{t}} \cdot \frac{1}{2\bar{u}} \cdot \sqrt{2t} \cdot \sqrt{2\bar{u}} \right) e^{-h^2 t} = 1!$$

• Pour l'aspect identité approchée,

$$\rightarrow \frac{1}{2\bar{u}} \int_{-\bar{u}}^{\bar{u}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-m^2 t} e^{imx} dx = \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-m^2 t} \int_{-\bar{u}}^{\bar{u}} e^{imx} \frac{dx}{2\bar{u}} = 1$$

$\rightarrow p(t, \cdot)$ est réelle positive

$\rightarrow \forall \delta \in]0, \bar{u}[$,

$$\begin{aligned} \int_{[-\bar{u}, \bar{u}] \setminus [-\delta, \delta]} p(t, x) dx &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sqrt{\frac{\bar{u}}{t}} \int_{[-\bar{u}, \bar{u}] \setminus [-\delta, \delta] + 2m\pi} e^{-\frac{(x+2m\bar{u})^2}{4t}} dx \leq \sqrt{\frac{\bar{u}}{t}} \int_{\mathbb{R} \setminus [-\delta, \delta]} e^{-\frac{x^2}{4t}} dx \\ &\leq \sqrt{\frac{\bar{u}}{t}} \int_{\mathbb{R} \setminus [-\frac{\delta}{\sqrt{t}}, \frac{\delta}{\sqrt{t}}]} e^{-\frac{x^2}{2}} \sqrt{t} dx \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

II.2) Cas $\Omega = \mathbb{R}^n$ et solution fondamentale.

INTERLUDE Transformée de Fourier

Pour $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ on pose

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \hat{u}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^d} u(x) e^{-i \sum_j \xi_j x_j} dx$$



Autres conventions

et alors $\hat{u} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est continu et injectif.

• si $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$ avec $u, \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ alors

$$\widehat{\frac{\partial u}{\partial x_j}}(\xi) = i \xi_j \hat{u}(\xi)$$

• si $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ alors

$$u(x) = \widehat{\hat{u}}(-x) \text{ pour presque tout } x \in \mathbb{R}^n.$$

• L'opérateur $\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$

$u \longmapsto \hat{u}$
se prolonge en une isométrie surjective de $L^2(\mathbb{R}^n)$

• si $u, v \in L^1(\mathbb{R}^n) \times L^1(\mathbb{R}^n)$, $\widehat{u * v} = (2\pi)^{n/2} \hat{u} \cdot \hat{v}$

Fin de l'INTERLUDE

Heuristique: Si on cherche à résoudre

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \text{ sur } [0, T[\times \mathbb{R}^m, & \text{on passe en Fourier} \\ u|_{t=0} = u_0 & \text{en la variable } x \end{cases}$$

et on récupère
$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = \sum_{j=1}^m (i z_j)^2 \hat{u} = -|z|^2 \hat{u} \\ \hat{u}|_{t=0} = \hat{u}_0 \end{cases}$$

et alors
$$\hat{u}(t, z) = \hat{u}_0(z) \exp(-|z|^2 t)$$

or si $w_a(x) = e^{-a|x|^2}$ avec $a \in]0, +\infty[$ alors

$$\hat{w}_a(z) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-a|x|^2 - i z \cdot x} dx$$

$$= \prod_{j=1}^m \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-a x_j^2 - i z_j x_j} dx_j$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2a}} \right)^m \exp\left(-\frac{|z|^2}{4a}\right)$$

Annotations:
 $ax_j^2 \leftrightarrow \frac{y_j^2}{2}$
 ARNAQUE! mais s'justifie bien par l'analyse complexe
 $\exp\left[-a\left(x_j + i \frac{z_j}{2a}\right)^2 - \frac{z_j^2}{4a}\right]$
 $a = \frac{1}{4t}$

et donc
$$\hat{u}(t, z) = \frac{1}{(2t)^{m/2}} \hat{u}_0(z) \hat{w}_{\frac{1}{4t}}(z) = \frac{1}{(4\pi t)^{m/2}} u_0 * w_{\frac{1}{4t}}(z)$$

i.e.

$$u = u_0 * \left[\frac{1}{(4\pi t)^{m/2}} w_{\frac{1}{4t}} \right]$$

Déf : La fonction $\Phi(t, x) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right) & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$
s'appelle solution fondamentale de l'équation de la chaleur.

Rq : voir [EVANS] pour des calculs de Φ sans Fourier.

Th : Soit $u_0 \in C_b^0(\mathbb{R}^n)$. On pose
 $\forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, u(t, x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y) dy$

Alors • $u \in C^\infty([0, +\infty[\times \mathbb{R}^n)$

• $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$ sur $]0, +\infty[\times \mathbb{R}^n$

• $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n, u(t, x_0) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} u_0(x_0)$

Preuve : • Sur $[\delta, +\infty[\times \mathbb{R}^n$, Φ est C^∞

et $|\partial_t^\alpha \partial_x^\beta \Phi| \leq C_\delta P(x) e^{-\frac{|x|^2}{\delta}}$ est intégrable

donc par résultat sur les intégrales à paramètre, u est C^∞

sur $[\delta, +\infty[\times \mathbb{R}^m$ pour tout $\delta > 0$.

• De plus

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \Delta \Phi \right) * u_0$$

avec
$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{m}{2} \cdot 4\pi (4\pi t)^{-\frac{m}{2}-1} \cdot e^{-\frac{|x|^2}{4t}} + (4\pi t)^{-\frac{m}{2}} \left[+ \frac{|x|^2}{4t^2} \right] e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

$$= \Phi(t, x) \left[-\frac{2\pi m}{4\pi t} + \frac{|x|^2}{4t^2} \right]$$

et
$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = (4\pi t)^{-\frac{m}{2}} \cdot \left[\frac{-2x_i}{4t} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \right] = \frac{-x_i}{2t} \Phi(t, x)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i^2} = -\frac{1}{2t} \Phi + \frac{x_i^2}{4t^2} \Phi, \quad \Delta \Phi = \left(-\frac{m}{2t} + \frac{|x|^2}{4t^2} \right) \Phi$$

et donc
$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \Delta \Phi = 0.$$

• En fin $\left(\Phi(t, \cdot) \right)_{t>0}$ est une approximation de l'unité, en effet

$$\forall t \in]0, +\infty[, \quad \int_{\mathbb{R}^m} \Phi(t, x) dx = \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \frac{dx}{(4\pi t)^{m/2}} = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{z^2}{4t}} \frac{dz}{\sqrt{4\pi t}} \right)^m = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{z^2}{2}} \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} \right)^m = 1$$

$$\text{et } \forall \delta > 0, \int_{\mathbb{R}^m \setminus B(0, \delta)} \Phi(t, x) dx = \left(2 \int_{\delta}^{+\infty} e^{-x^2/4t} \frac{dx}{\sqrt{4\pi t}} \right)^m \\ = \left(2 \int_{\frac{\delta \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{4t}}}^{+\infty} e^{-x^2/2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \right)^m \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 \quad \square$$

Rq : • On constate que si $u_0 \geq 0$ est nontrivial, alors
 $\forall t > 0, u(t, \cdot) > 0$ partout. On parle
de propagation en vitesse infinie

• On constate également $\forall t, \sup_{\mathbb{R}^d} u(t, \cdot) \leq \sup_{\mathbb{R}^d} u_0$

Cas de l'équation non-homogène :

De la même manière, si on veut résoudre

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f, & \text{le calcul en Fourier donne} \\ u|_{t=0} = u_0. & \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = -|\xi|^2 \hat{u} + \hat{f} \end{cases}$$

qui se résout par

$$\hat{u}(t, \xi) = e^{-t|\xi|^2} \hat{u}_0(\xi) + \int_0^t e^{-(t-s)|\xi|^2} \hat{f}(s, \xi) ds$$

(il s'agit de la méthode de variation de la constante :

en effet on cherche $\hat{u}$ de la forme $p(t, z) \cdot e^{-t|z|^2}$

$$\text{et } \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = -|z|^2 \hat{u} + \hat{f} \Leftrightarrow \frac{\partial p}{\partial t} e^{-t|z|^2} - |z|^2 p e^{-t|z|^2} = -|z|^2 p e^{-t|z|^2} + \hat{f} e^{-t|z|^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial p}{\partial t} = \hat{f} e^{+t|z|^2}$$

$$\Leftrightarrow p(t, z) = \int_0^t \hat{f}(s, z) e^{s|z|^2} ds + \hat{u}_0(z)$$

$$\Leftrightarrow \hat{u}(t, z) = \hat{u}_0(z) e^{-t|z|^2} + \int_0^t \hat{f}(s, z) e^{-(t-s)|z|^2} ds$$

$$\text{d'où } u(t, \cdot) = u_0 * \Phi(t, \cdot) + \int_0^t \Phi(t-s, \cdot) * f(s, \cdot) ds$$

On peut en effet montrer :

Th : si $u_0 \in C_b^0(\mathbb{R}^m)$ et $f \in C_c^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^m)$ Rég. ent et en x resp.

$$\text{alors } u(t, \cdot) := u_0 * \Phi(t, \cdot) + \int_0^t \Phi(t-s, \cdot) * f(s, \cdot) ds$$

est $C^{1,2}([0, +\infty[\times \mathbb{R}^m)$ et satisfait

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f & \text{sur }]0, +\infty[\times \mathbb{R}^m \\ u|_{t=0} = u_0 & \text{sur } \mathbb{R}^m. \end{cases}$$

Voir [EVANS] page 50.

Rq : Il s'agit de la formule de Duhamel (comme pour les EDO)

II-3) Propriétés dans le cas général

Dans ce paragraphe, on se donne Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et on considère $Q_T =]0, T] \times \Omega$ pour $T \in]0, +\infty[$.

Th Unicité
Cas borné.

Il y a unicité des solutions $C^{1,2}(\overline{Q_T})$ de

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f & \text{sur } Q_T \\ u = \varphi & \text{sur } [0, T[\times \partial\Omega \\ u|_{t=0} = u_0 & \text{sur } \overline{\Omega} \end{cases}$$

Preuve "énergétique": si u_1 et u_2 sont solutions, alors

$$w = u_1 - u_2 \text{ résout } \begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} - \Delta w = 0 & \text{sur } Q_T \\ w|_{t=0} = 0 & \text{sur } \overline{\Omega} \text{ et } w = 0 & \text{sur } [0, T[\times \partial\Omega \end{cases}$$

On pose $e(t) = \int_{\Omega} w^2(t, x) dx$. Alors e est dérivable et

$$e'(t) = 2 \int_{\Omega} w \frac{\partial w}{\partial t} = 2 \int_{\Omega} w \Delta w = -2 \int_{\Omega} |\nabla w|^2 \quad (w=0 \text{ sur } \partial\Omega)$$

donc e décroît, d'où $0 \leq e(t) \leq e(0) = 0$

et donc $w \equiv 0$



Th Principe (parabolique) du maximum faible

Soit $u \in C^{1,2}(Q_T) \cap C^0(\overline{Q}_T)$ tq $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0$

Alors

$$\max_{\overline{Q}_T} u = \max_{\Gamma_T} u$$

$$\Gamma_T := \{0\} \times \overline{\Omega} \text{ (cond init.)}$$

$$\cup [0, T] \times \partial\Omega \text{ (cond au bord)}$$

$$= \max \left\{ \max_{\overline{\Omega}} u_0, \max_{[0, T] \times \partial\Omega} \varphi \right\}$$

appelé bord
parabolique

Preuve: On pose $v_\varepsilon(t, x) = u(t, x) - \varepsilon t$.

$$\text{Alors } \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t} - \Delta v_\varepsilon = -\varepsilon < 0$$

Comme $\overline{Q}_T$ est compact, v_ε atteint son max en $(t_0, x_0) \in \overline{Q}_T$

et si $(t_0, x_0) \in Q_T$ alors $\Delta v_\varepsilon(t_0, x_0) \leq 0$

$$\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t}(t_0, x_0) = 0 \quad (\text{si } t_0 < T)$$
$$\geq 0 \quad (\text{si } t_0 = T)$$

ce qui est une contradiction et donc $(t_0, x_0) \in \Gamma_T$

$$\text{Ainsi } \max_{\overline{Q}_T} u \leq \max_{\overline{Q}_T} v_\varepsilon + \varepsilon T$$

$$= \max_{\Gamma_T} v_\varepsilon + \varepsilon T \leq \max_{\Gamma_T} u + \varepsilon T$$

et enfin on fait $\varepsilon \rightarrow 0$



Rq : La preuve fonctionne sous l'hypothèse plus faible

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u \leq 0.$$

• Dans le cas $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0$ on a donc

$$\min_{\Gamma_T} u \leq u(t, x) \leq \max_{\Gamma_T} u$$

• On peut en déduire une autre preuve d'unicité.

• Il existe un **principe fort du maximum** (cf TD)

si Ω est convexe et il existe $(t_0, x_0) \in Q_T$ tq $u(t_0, x_0) = \max_{\overline{Q_T}} u$

alors u est constant sur $\overline{Q_{t_0}}$

ce qui justifie le principe de propagation à vitesse infinie 

car si on regarde

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 & \text{sur } Q_T \\ u = 0 & \text{sur } [0, T] \times \partial\Omega \\ u|_{t=0} = u_0 \end{cases}$$

et si $u_0 \geq 0$ et $u_0 \not\equiv 0$, alors $\forall t > 0, \forall x \in \Omega, u(t, x) > 0$.

• Dans $\mathbb{R}^n$, il n'y a pas unicité [Tychoff 1935]
sauf sous condition de croissance

Th (Unicité dans $\mathbb{R}^n$)

(Unicité par Fourier? ok dans $C^1([0,T], \mathbb{R}^n) \cap C([0,T], \mathbb{R}^n)$)

Soit $f \in C^0([0,T] \times \mathbb{R}^n)$ et $u_0 \in C^0(\mathbb{R}^n)$. Il y a au plus une solution $C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^n) \cap C^0([0,T] \times \mathbb{R}^n)$ à

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f \\ u|_{t=0} = u_0 \end{cases} \quad \text{satisfaisant} \quad |u(t,x)| \leq A e^{a|x|^2} \quad \forall t,x$$

for some A, a

Proof • If u_1, u_2 are solutions then $w = u_1 - u_2$ satisfies

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} - \Delta w = 0 \\ w|_{t=0} = 0 \end{cases} \quad \text{and} \quad |w(t,x)| \leq A e^{a|x|^2}$$

Let's show $w \leq 0$, which allows to conclude as $-w$ satisfies the same properties.

• Assume first $4aT < 1$ which implies $4a(T+\varepsilon) < 1$ for $\varepsilon > 0$ small.

we define $v(t,x) = w(t,x) - \frac{\mu}{(T+\varepsilon-t)^{n/2}} \exp\left(\frac{|x-y|^2}{4(T+\varepsilon-t)}\right)$ where $y \in \mathbb{R}^n$ and $\mu > 0$

Also $\frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = 0$ [DETAILLER].

We work in $Q_T =]0,T] \times B(y,r)$: by maximum principle

$$\begin{aligned} \max_{\bar{Q}_T} v &= \max_{\substack{\Gamma_T \\ \text{bord parabolique} \\ \text{de } Q_T}} v \quad \text{while} \quad \begin{cases} v|_{t=0} \leq w|_{t=0} = 0 \\ \forall x \in \partial B(y,r), v(t,x) \leq A e^{a|x|^2} - \frac{\mu}{(T+\varepsilon-t)^{n/2}} e^{\frac{r^2}{4(T+\varepsilon-t)}} \end{cases} \\ &\leq A e^{a(y+r)^2} - \frac{\mu}{(T+\varepsilon)^{n/2}} e^{\frac{r^2}{4(T+\varepsilon)}} \end{aligned}$$

But as $\frac{1}{4(T+\varepsilon)} = a + \gamma$ for some $\gamma > 0$

we get $\forall x \in \partial B(y, r), v(t, x) \leq \underbrace{A e^{a(|y|+r)^2} - \mu[4(a+r)]^{n/2} e^{r^2(a+r)}}_{\leq 0 \text{ pour } r \text{ grand}}$

d'où $\max_{\overline{Q_T}} v \leq 0$ pour r grand

et on fait alors $\mu \rightarrow 0$ pour obtenir $w \leq 0$ sur $\overline{Q_T}$.

- Si maintenant $4aT \geq 1$, on découpe $]0, T]$ en $]0, T_1],]T_1, 2T_1], \dots$
avec $T_1 = \frac{1}{8a}$ et on applique itérativement l'estimation précédente
 $w \leq 0$ sur chaque $]kT_1, (k+1)T_1]$.

□

Contre-exemple à l'unicité sans condition de croissance par
[Tychonoff 1935]

Th (Régularité)

$$\text{Soit } u \in C^{1,2}(Q_T) \text{ t.q. } \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$$

$$\text{Alors } u \in C^\infty(Q_T)$$

Preuve : Pour $t \in \mathbb{R}_+$, $x \in \mathbb{R}^n$, $r \in]0, +\infty[$ on pose

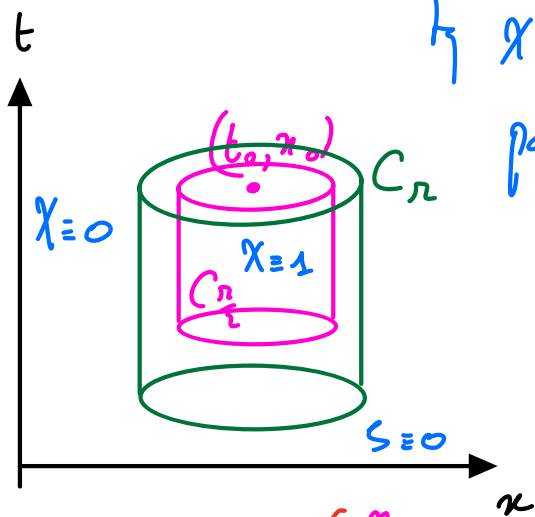
$$C_r(t, x) = \{ (s, y), t-r^2 \leq s \leq t, |x-y| \leq r \}$$

un cylindre de "profondeur" r^2

• Soit $(t_0, x_0) \in Q_T$ et $r > 0$ petit de sorte que $C_r \subset Q_T$

On introduit une fonction "cut-off" $\chi \in C_c^\infty(Q_T)$

t.q. $\chi \equiv 1$ sur $C_{\frac{r}{2}}$ et $\chi \equiv 0$ sur le voisinage parabolique de C_r et on étend χ par 0 sur $[0, t_0] \times \mathbb{R}^n \setminus C_r$.



sur $[0, t_0] \times (\mathbb{R}^n \setminus \Omega)$

On pose $v = \chi u$ qui se prolonge par 0

qui est aussi régulière que u :

$$\text{alors } \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = \left(\frac{\partial \chi}{\partial t} \right) u + \chi \frac{\partial u}{\partial t} - (\Delta \chi) u - 2 \nabla \chi \cdot \nabla u - \chi \Delta u$$

$$\text{et } v|_{t=0} \equiv 0$$

donc par th d'unicité sur $\mathbb{R}^n$, et la formule de Duhamel,

$$v(t, \cdot) = \int_0^t \Phi(t-s, \cdot) * f(s, \cdot) ds$$

• Ainsi $\forall (t, x) \in C_{\frac{n}{2}}$

$$u(t, x) = v(t, x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t-s, x-y) \underbrace{\left(\left(\frac{\partial \chi}{\partial t} \right) u - (\Delta \chi) u - 2 \nabla \chi \cdot \nabla u \right)}_{\text{supporté dans } C_n \setminus C_{\frac{n}{2}}}(y, s) dy ds$$

mais si $(t, x) \in C_{\frac{n}{4}}$ et $(s, y) \in C_n \setminus C_{\frac{n}{2}}$,

$$\begin{cases} t_0 - \left(\frac{n}{4}\right)^2 \leq t \leq t_0 \text{ et } t_0 - n^2 \leq s \leq t_0 - \left(\frac{n}{2}\right)^2 \text{ donc } t-s \geq n^2 - \left(\frac{n}{4}\right)^2 \\ |x - x_0| \leq \frac{n}{4} \text{ et } \frac{n}{2} < |y - x_0| \leq n \text{ donc } |x - y| \geq \frac{n}{2} - \frac{n}{4} = \frac{n}{4} \end{cases}$$

donc on évite les singularités de Φ , donc $u \equiv v$ est C^∞ sur $C_{\frac{n}{4}}$ □

Pour conclure, on évoque une approche possible pour l'existence de solution à

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 & \text{sur } \mathbb{R}_+ \times \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \mathbb{R}_+ \times \partial\Omega \\ u|_{t=0} = u_0 & \text{sur } \overline{\Omega} \end{cases}$$

Heuristique: on procède comme pour le cas périodique et

on cherche une solution $u(t, x) = v(t) w(x)$ et alors

$$\frac{v'(t)}{v(t)} = \lambda = \frac{-\Delta w}{w}$$

donc on est amené à étudier le pb aux valeurs propres

$$\begin{cases} -\Delta w = \lambda w & \text{sur } \Omega \\ w = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

On montrera qu'il existe $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \longrightarrow \infty$

et (w_n) base hilbertienne de $L^2(\Omega)$ tq

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} -\Delta w_n = \lambda_n w_n & \text{sur } \Omega \\ w_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

et alors $u(t, x) := \sum_{n \in \mathbb{N}^*} e^{-\lambda_n t} \langle u_0, w_n \rangle w_n$ est solution

de l'éq. ci-dessus.

Conclusion L'équation de la chaleur

- se traite bien par l'analyse de Fourier sur $(\mathbb{S}^1)^n$ ou $\mathbb{R}^n$
- satisfait un principe de comparaison et donc une propriété d'unicité (sur Ω borné)
- a un effet régularisant (dès $t > 0$)
- et un effet de propagation à vitesse infinie ($u > 0$ partout si $u_0 \geq 0$ et $u_0 \neq 0$)
- se résout seulement pour $t > 0$
- se résout bien si on sait diagonaliser $-\Delta$

III) Equation des Ondes

On étudie l'équation $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0$ ou f

avec conditions de bord et initiales

(comme pour les EDO d'ordre 2, ici les conditions initiales consistent à se donner $u|_{t=0} = u_0$ et $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = u_1$)

(On note parfois $\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$ qu'on appelle d'Alembertien)

III.1) Cas $\Omega = \mathbb{R}$

L'équation se "factorise" : $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right) \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)}_v u$

La fonction v est solution de l'équation de transport

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

donc v est de la forme $v(t, x) = a(x-t)$

et u est solution d'une équation de transport avec 2nd membre

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = a(x-t)$$

On pose $z : s \mapsto u(t+s, x-s)$ et on constate

$$z'(s) = \frac{\partial u}{\partial t}(t+s, x-s) - \frac{\partial u}{\partial x}(t+s, x-s) = a(x-t-2s)$$

$$\begin{aligned} d'_{m^c} \quad u(t, x) &= z(0) = \int_{-t}^0 \underbrace{z'(s)}_{a(x-t-2s)} ds + u(0, x+t) \\ &= \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} a(y) dy + u_0(x+t) \end{aligned}$$

mais alors $\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = a(x) + u'_0(x)$

$$\begin{aligned} d'_{m^c} \quad u(t, x) &= u_0(x+t) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} (u_1 - u'_0) \\ &= \frac{1}{2} [u_0(x+t) + u_0(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} u_1(s) ds \end{aligned}$$

On a donc le résultat immédiat Formule de D'ALEMBERT.

Th On suppose $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$ et $u_1 \in C^1(\mathbb{R})$
 et $u : (t, x) \mapsto \frac{1}{2} [u_0(x+t) + u_0(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} u_1(s) ds$.

Alors • $u \in C^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$

• $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$

• $u|_{t=0} = u_0$ et $\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = u_1$.

et cette solution est unique.

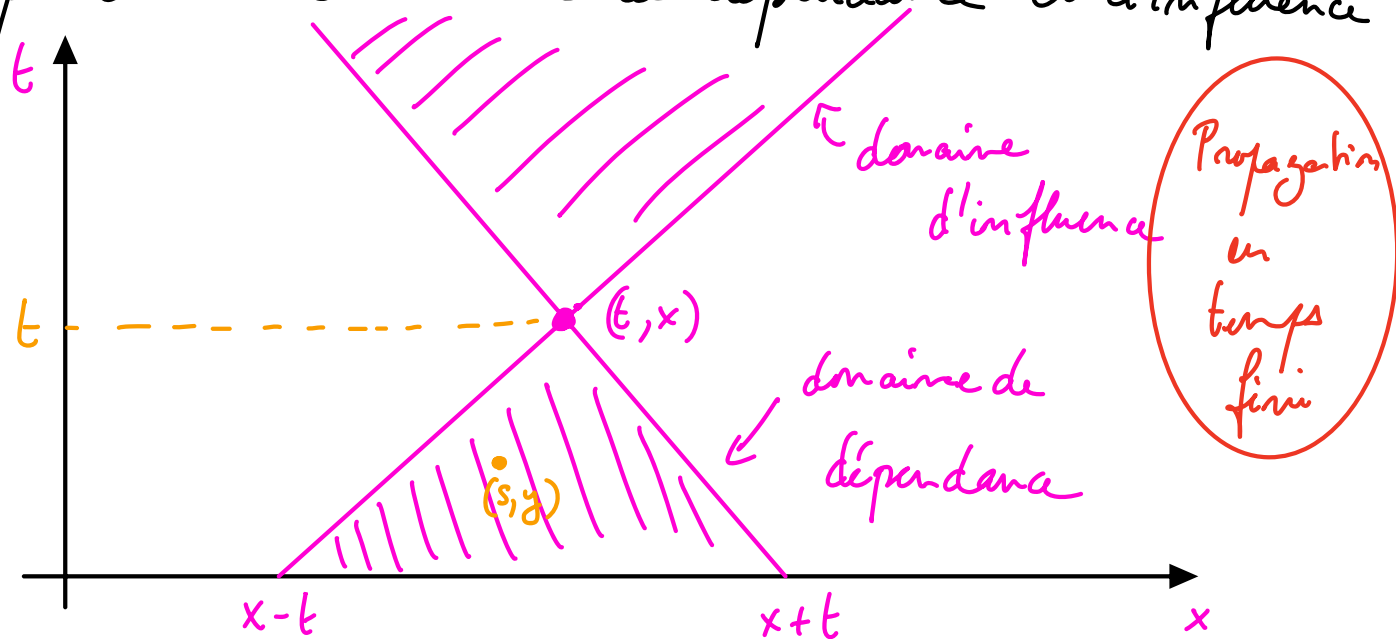
Rq : si $u_0 \in C^h$ et $u_1 \in C^{h-1}$ avec $h \geq 2$

alors $u \in C^h$ et ne peut pas être plus régulière.

Il n'y a pas de phénomène de régularisation.

- Au temps (t, x) la valeur de u ne dépend des valeurs de u_0 et u_1 uniquement sur $[x-t, x+t]$

ce qui donne le schéma de dépendance et d'influence



- On n'a pas de principe du maximum du type

$$\min_{\mathbb{R}} u_0 \leq u \leq \max_{\mathbb{R}} u_0 \quad (\text{considérer par exemple } u_0 = 0, u_1 \text{ non nul})$$

- La solution est aussi valable sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$

- On peut également résoudre le pb non homogène : l'unique

solution est $u(t, x) = \frac{1}{2} [u_0(x+t) + u_0(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} u_1(s) ds$

$$(\Delta_{t,x} = \{(s, y), 0 \leq s \leq t, |x-y| \leq t-s\}) + \frac{1}{2} \int_{\Delta_{t,x}} f(y) dy \rightarrow \text{TD.}$$

III.2) Cas d'un segment

On regarde
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{sur } [0, \pi] \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 \\ u|_{t=0} = u_0 \text{ et } \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = u_1 \end{cases}$$

La recherche de solution à variables séparées donne :

$u(t, x) = v(t)w(x)$ solution si $v'' = \lambda v$ et $w'' = \lambda w$

d'où $w(x) = \begin{cases} \alpha e^{\sqrt{\lambda}x} + \beta e^{-\sqrt{\lambda}x} & \text{si } \lambda > 0 \\ \alpha x + \beta & \text{si } \lambda = 0 \\ \alpha \cos(\sqrt{|\lambda|x}) + \beta \sin(\sqrt{|\lambda|x}) & \text{si } \lambda < 0 \end{cases}$ incompatible avec $w(0) = w(\pi) = 0$ donne $\alpha = 0$ et $\beta \sin(\sqrt{|\lambda|}\pi) = 0$

Nécessairement il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $\lambda = -m^2$

et alors $w_m(x) = \sin mx$ et $v_m(t) = \alpha_m \cos mt + \beta_m \sin mt$

Ainsi $u(t, x) = \sum_{m=0}^N [\alpha_m \cos mt + \beta_m \sin mt] \sin mx$ est solution avec

$$u|_{t=0} = \sum_{m=1}^N \alpha_m \sin mx \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \sum_{m=1}^N m \beta_m \sin mx$$

On cherche donc à développer u_0 et u_1 en somme de $(\sin m \cdot)$

Pour cela on considère une implanisation & périodisation de u_0 et u_1 et le dvp^t en série de Fourier s'écrit

$$u_0(x) = \sum_{m \geq 1} \alpha_m \sin mx \quad \text{et} \quad u_1(x) = \sum_{m \geq 1} \tilde{\alpha}_m \sin mx$$

et alors $u(t, x) = \sum_{m \geq 1} \left(\alpha_m \cos(mt) + \frac{\tilde{\alpha}_m}{m} \sin(mt) \right) \sin mx$ est solution

mais il faut pouvoir justifier la convergence et la régularité,
ce qui est moins clair que pour l'éq. de la chaleur.

Par exemple si u_0 est --- [à détailler]

III.3) Solutions dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

On cherche à résoudre

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 \\ u|_{t=0} = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = u_1 \end{cases}$$

Ré : On suppose $u_0 \in C^3$ et $u_1 \in C^2$. Alors la fonction

$$\begin{cases} \text{si } n=2, u(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{t^2}{2} \int_{B(x,t)} \frac{u_0(y) dy}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}} \right] + \frac{t^2}{2} \int_{B(x,t)} \frac{u_1(y) dy}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}} \\ \text{si } n=3, u(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} \left[t \int_{\partial B(x,t)} u_0 \right] + t \int_{\partial B(x,t)} u_1 \end{cases}$$

• est C^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^n$

• satisfait. $\forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0$

$$\lim_{(t,x) \rightarrow (0,x_0)} u(t, x) = u_0(x_0) \text{ et } \lim_{(t,x) \rightarrow (0,x_0)} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = u_1(x_0)$$

Ré : Ces formules s'appellent formule de Poisson (si $n=2$)
et de Kirchhoff (si $n=3$)

• On peut les réécrire :

$$u(t, x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_{B(x,t)} \frac{t u_0(y) + t^2 u_1(y) + t D u_0(y) \cdot (y-x)}{(t^2 - |y-x|^2)^{1/2}} dy & \text{si } n=2 \\ \int_{\partial B(x,t)} u_0(y) + t u_1(y) + D u_0(y) \cdot (y-x) dy & \text{si } n=3 \end{cases}$$

Preuve: soit $u \in C^2$ solution de l'équation des ondes. Soit x fixé: $n=3$

On pose $U(t, n) = \int_{\partial B(x, n)} u(t, \cdot)$, $U_0(x; n) = \int_{\partial B(x, n)} u_0$

$$U_1(x; n) = \int_{\partial B(x, n)} u_1$$

Lemme: Alors $U \in C^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$ et

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial n^2} - \frac{n-1}{n} \frac{\partial U}{\partial n} = 0 & \text{sur }]0, +\infty[\times]0, +\infty[\\ U|_{t=0} = U_0 & \frac{\partial U}{\partial t}|_{t=0} = U_1 \end{cases}$$

Preuve: • $U(t, n) = \frac{1}{n^{n-1} |\partial B(0, 1)|} \int_{\partial B(0, 1)} u(t, x+n\omega) n^{n-1} d\omega$ C² en t.

donc $\frac{\partial U}{\partial n}(t, n) = \frac{1}{|\partial B(0, 1)|} \int_{\partial B(0, 1)} \nabla u(t, x+n\omega) \cdot \omega d\omega$ $y = x+n\omega$

$$\begin{aligned} \int \nabla u \cdot \nabla v &= -\int u \Delta v + \int u \partial_n v \\ &= \frac{1}{|\partial B(0, 1)|} \int_{\partial B(x, n)} \nabla u(t, y) \frac{y-x}{n} \frac{dy}{n^{n-1}} \\ &= \frac{1}{|\partial B(x, n)|} \int_{\partial B(x, n)} \partial_n u(t, \cdot) \cdot 1 d\sigma \\ &= \frac{1}{|\partial B(x, n)|} \left(\int_{B(x, n)} \nabla u \cdot \nabla 1 + \int_{B(x, n)} 1 \cdot \Delta u \right) = \frac{n}{n} \int_{B(x, n)} \Delta u \end{aligned}$$

En particulier $\frac{\partial U}{\partial n} \xrightarrow{n \rightarrow 0} 0$ (et même $\frac{\partial U}{\partial n} = O(n)$)

• Par suite $\frac{\partial^2 U}{\partial n^2}(t, x; r) = \frac{1}{m} \int_{B(x, r)} \Delta u + \frac{r}{m} \left[-\frac{m}{r |B(x, r)|} \int_{B(x, r)} \Delta u \right]$

$$= \left(\frac{1}{m} - 1 \right) \int_{B(x, r)} \Delta u + \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} \Delta u$$

$|B(x, r)| = \omega_m r^m$ $\frac{\partial}{\partial r} |B(x, r)| = m \omega_m r^{m-1} = |\partial B(x, r)|$

$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{|B(x, r)|} \right) = \frac{-|\partial B(x, r)|}{|B(x, r)|^2} = -\frac{m}{\omega_m r^{m+1}} = -\frac{m}{r} \cdot \frac{1}{|B(x, r)|}$

et en particulier $\frac{\partial^2 U}{\partial n^2} \xrightarrow{r \rightarrow 0} \frac{1}{m} \Delta u(t, x)$ et U est C^2 jusqu'à $r=0$.

• En fin, $\frac{\partial U}{\partial n} = \frac{r}{m} \int_{B(x, r)} \Delta u = \frac{r}{m} \int_{B(x, r)} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{r}{m \omega_m r^m} \int_{B(x, r)} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

donc $r^{m-1} \frac{\partial U}{\partial n} = \frac{1}{m \omega_m} \int_{B(x, r)} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ et on peut dériver en r :

$\frac{\partial}{\partial r} \left[r^{m-1} \frac{\partial U}{\partial n} \right] = \frac{1}{m \omega_m} \int_{\partial B(x, r)} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = r^{m-1} \int_{\partial B(x, r)} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = r^{m-1} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$

$(m-1) r^{m-2} \frac{\partial U}{\partial n} + r^{m-1} \frac{\partial^2 U}{\partial n^2}$

d'où $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial n^2} - \frac{m-1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} = 0$

Cas $n=3$: on pose $\tilde{U} = n U$, $\tilde{U}_0 = n U_0$, $\tilde{U}_1 = n U_1$

et alors

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial t^2} &= n \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = n \left[\frac{\partial^2 U}{\partial n^2} + \frac{2}{n} \frac{\partial U}{\partial n} \right] \\ &= \frac{2}{\partial n} \left[U + n \frac{\partial U}{\partial n} \right] = \frac{\partial^2}{\partial n^2} \tilde{U}. \\ \tilde{U}|_{t=0} &= n U_0 = \tilde{U}_0 \quad \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t}|_{t=0} = n \frac{\partial U}{\partial t}|_{t=0} = n U_1 = \tilde{U}_1 \end{aligned} \right.$$

i.e. $\tilde{U}$ est solution de l'équation des ondes 1D sur $\mathbb{R}_+$

Mais comme $\tilde{U}(t, 0) = 0 \quad \forall t > 0$ on peut "imposer" $\tilde{U}, \tilde{U}_0, \tilde{U}_1$
 $\tilde{U}|_{t=0}(0) = 0$ de sorte que l'équation
 $\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t}|_{t=0}(0) = 0$ est satisfaite sur $\mathbb{R}$

et donc par la formule de d'Alembert,

(on préserve la caractéristique C^1
 mais pas forcément C^2)

$$\tilde{U}(t, n) = \frac{1}{2} \left[\tilde{U}_0(n+t) + \tilde{U}_0(n-t) \right] + \frac{1}{2} \int_{n-t}^{n+t} \tilde{U}_1(s) ds$$

↑ attention ce sont les versions

et si $0 < n \leq t$

$$= \frac{1}{2} \left[\tilde{U}_0(n+t) - \tilde{U}_0(t-n) \right] + \frac{1}{2} \int_{t-n}^{t+n} \tilde{U}_1(s) ds$$

imposées.

et finalement pour $t > 0$,

$$u(t, n) = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \tilde{U}(t, n) = \tilde{U}_0'(t) + \tilde{U}_1(t)$$

(on $\int_{n-t}^{t-n} \tilde{U}_1 = 0$)

$$= \frac{\partial}{\partial t} \left[t \oint_{\partial B(x,t)} u_0 \right] + t \oint_{\partial B(x,t)} u_1 \quad (+ \text{conditions initiales.})$$

Cas $n=2$: Ici l'astuce est d'étendre u à $\mathbb{R}^3$ (et u_0, u_1)

$$(u(t, (x_1, x_2, x_3)) = u(t, (x_1, x_2)))$$

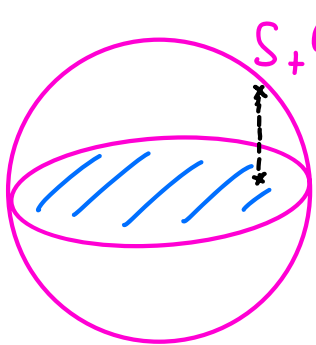
et u reste solution de l'éq. des ondes

On peut donc appliquer la formule du cas $n=3$:

$$u(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} \left[t \oint_{\partial B(x,t)} u_0 \right] + t \oint_{\partial B(x,t)} u_1$$

mais $\oint_{\partial B(x,t)} u_0 = \frac{1}{4\pi t^2} \int_{S_+(x,t)} u_0 = \frac{2}{4\pi t^2} \int_{B_2(x,t)} u_0(y) \sqrt{1 + |\nabla \varphi(y)|^2}$

$\uparrow$
bord de $\mathbb{R}^3$



is the graph of $y \mapsto \sqrt{t^2 - |y-x|^2}$
 $B_{\mathbb{R}^2}(x,t)$

$$\text{et } \nabla \varphi(y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(-2y + 2x)}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}} = \frac{x-y}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}}$$

$$d'nc \sqrt{1 + |\nabla \varphi(y)|^2} = \sqrt{1 + \frac{|y-x|^2}{t^2 - |y-x|^2}} = \frac{t}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}}$$

$$\text{donc } \oint_{\partial B(x,t)} u_0 = \frac{1}{2\pi t} \int_{B_2(x,t)} \frac{u_0(y)}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}} dy = \frac{t}{2} \oint_{B_2(x,t)} \frac{u_0(y) dy}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}} \quad \square$$

Rq: • Ces formules se généralisent aux cas n pair et n impair

• A un point (t, x) , la valeur de u

→ ne dépend que des valeurs de u_0, u_1 en

$$\{(t, y), |y - x| = t\} \quad \text{si } n = 3$$

→ dépend des valeurs de u_0, u_1 sur

$$\{(t, y), |y - x| < t\} \quad \text{si } n = 2$$

Dans $\mathbb{R}^3$ les ondes sonores se propagent selon des sphères
mais si on devait écouter des sons dans $\mathbb{R}^2$,

au temps t on aurait un mélange des sons des temps précédents.

C'est le principe de Huygens

III.4) Propriétés dans le cas général

Th $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ ouvert borné de classe C^1 , $T > 0$

$$Q_T =]0, T] \times \Omega, \quad \Gamma_T = \overline{Q_T} \setminus Q_T$$

Il y a unicité des solutions $C^2(Q_T)$ de l'équation

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f & \text{sur } Q_T \\ u = \varphi & \text{sur }]0, T] \times \partial\Omega \\ u|_{t=0} = u_0 \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = u_1 \end{cases}$$

Preuve : si u et $\tilde{u}$ sont solutions, $w = u - \tilde{u}$ est solution avec données (f, φ, u_0, u_1) nulles.

$$\bullet \text{ On pose } e(t) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial w}{\partial t} \right|^2 + |\nabla w|^2 \quad \forall t \in [0, T].$$

$$\begin{aligned} \text{Alors } e \text{ est de classe } C^1 \text{ et } e'(t) &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) + \nabla w \cdot \nabla \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial t} \left[\underbrace{\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \Delta w}_{=0} \right] \text{ par IPP. } \quad \left(\text{pas de terme de bord} \right. \\ &\quad \left. \text{car } \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right) \end{aligned}$$

Ainsi $e(t) = e(0) = 0$ pour tout t , donc w est constant,

et donc nul du fait des conditions initiales/de bord $\square$

Th: Domaine de dépendance

$$\text{Soit } u \in C^2([0, T] \times \mathbb{R}^n) \text{ tq } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 \text{ sur } [0, T] \times \mathbb{R}^n$$

$$\text{Si } u|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} \text{ est nul sur } B(x_0, r_0)$$

$$\text{Alors } u = 0 \text{ sur le cône } \left\{ (t, x), 0 \leq t \leq r_0, |x - x_0| \leq r_0 - t \right\}$$



Rq: Pour $n \in [1, 3]$, ceci découle des formules de représentation, mais on peut faire une preuve énergétique plus rapide.

Preuve: On pose $e(t) = \frac{1}{2} \int_{B(x_0, t_0-t)} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + |\nabla u|^2$ pour $t \in [0, t_0]$

$$\int \nabla u \cdot \nabla w = - \int \Delta u \cdot w + \int \frac{\partial u}{\partial t} w$$

Alors e est C^1 et

$$\begin{aligned} e'(t) &= \int_{B(x_0, t_0-t)} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) + \nabla u \cdot \nabla \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) - \frac{1}{2} \int_{\partial B(x_0, t_0-t)} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + |\nabla u|^2 \\ &= \int_{B(x_0, t_0-t)} \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u \right)}_{=0} + \int_{\partial B(x_0, t_0-t)} \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} |\nabla u|^2}_{\leq 0} \end{aligned}$$

$$\text{donc } \forall t \in [0, t_0], 0 \leq e(t) \leq e(0) = 0$$

donc u est constant et donc nul sur le cône

□

Conclusion : Pour l'équation des ondes,

- on peut calculer les solutions pour $\Omega = \mathbb{R}^m$
- on n'a pas de principe du maximum, mais on montre l'unicité par méthode énergétique
- on n'a pas de gain de régularité, voire on a perte de régularité par rapport aux données initiales
- Il y a propagation à vitesse finie via une cône de dépendance
- On a trouvé des solutions pour $t > 0$ et $t < 0$.

CONCLUSION du CHAPITRE 1

On a étudié 3 EDP très classiques qui sont des EDP d'ordre 2 à coefficients ^{réels} constants.

Si on est dans $\mathbb{R}_+ \times I$ avec I intervalle de $\mathbb{R}$, on peut plus généralement considérer

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} u + c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + d \frac{\partial u}{\partial t} + e \frac{\partial u}{\partial x} + f u = 0$$

Comme pour les EDO, on peut chercher des solutions de la forme $\exp[\lambda t + h x]$ et on obtient l'équation d'une conique

$$a \lambda^2 + b \lambda h + c h^2 + d \lambda + e h + f = 0$$

→ si $b^2 - 4ac < 0$, l'ensemble (λ, h) des solutions est

une ellipse : on parle d'équation elliptique (Laplace
 $a=c=1$)

→ si $b^2 - 4ac = 0$, on a une parabole (chaleur $a=b=0$
 $d=1, c=-1$)

→ si $b^2 - 4ac > 0$, on a une hyperbole (ondes,
 $a=1, c=-1$)

La généralisation des mots "elliptique, parabolique, hyperbolique"

n'est pas toujours évidente.

Dans le cas des EDP linéaires du 2nd ordre à coefficients variables $\forall \text{ sur } \mathbb{R}^2$, ça fonctionne si $b^2(t, x) - 4a(t, x)c(t, x)$ ne change pas de signe.

On proposera des classes d'EDP qualifiées "elliptique / parabolique / hyperboliques" et on va essayer de retrouver les phénomènes observés dans chacune des équations précédentes.

Par exemple, l'équation de Schrödinger

$$i \frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u = 0 \text{ on } \mathbb{V}u$$

est | "entre hyperbolique et parabolique" ([CARLES Rémi])
| "hors catégorie"
| "dispersive"

CHAPITRE 2

Loi de conservation scalaire

On va explorer quelques EDP de la forme $F(\nabla u, u, x) = 0$
 où $F: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$.

I) Equations de transport

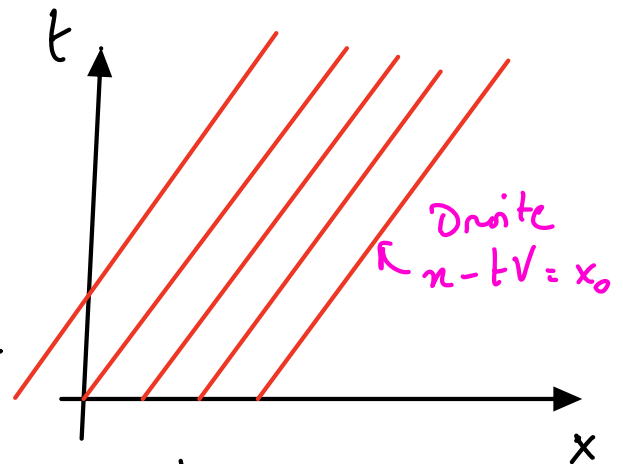
Il s'agit des équations de la forme

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + V \cdot \nabla u = 0 & \text{sur } \underbrace{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n}_{\text{on } [0, T]} \\ u|_{t=0} = u_0 \end{cases} \quad \underline{V(t, x)}$$

I.1) Solutions classiques

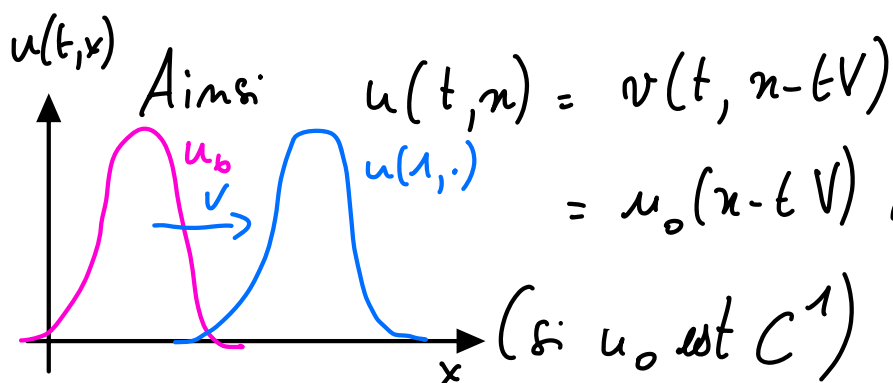
Ex: si V est constant, on pose

$$v(t, x) = u(t, x + tV) :$$



$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}(t, x + tV) + V \cdot \nabla u(t, x + tV) = 0$$

donc l'EDP sur u devient $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$ d'où $v(t, x) = v(0, x) = u_0(x)$



Ainsi $u(t, x) = v(t, x - tV)$

$= u_0(x - tV)$ est l'unique solution

(si u_0 est C^1)

On parle d'onde progressive.

Dans le cas général on a

Th: soit $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^n)$ et $V: [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 et tq $\exists K$ tq $|V(t, x)| \leq K(1+|x|) \forall t, x$

Alors le pb de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + V \cdot \nabla_x u = 0 \\ u|_{t=0} = u_0 \end{cases}$$

admet une unique solution $u \in C^1([0, T] \times \mathbb{R}^n)$
et cette solution est donnée par

$$u(t, x) = u_0(X_0(t, x))$$

où $(X_s(t, x))_{s,t}$ est solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial s} X_s = V(s, X_s) \\ X_{s=t}(t, x) = x \end{cases}$$

Rq: On appelle X le flot caractéristique de $\frac{\partial}{\partial t} + V \cdot \nabla_x$

$X_s(t, x)$ est la valeur en s de la solution partant de " (t, x) ".

Autre notation $X(s; (t, x))$ ou $\Phi_{s,t}(x)$ ou $\Phi_s(t, x)$

Preuve: • Etude du flot caractéristique.

On se donne $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^m$, et

$$\gamma \text{ la sol maximale de } \begin{cases} \gamma' = V(s, \gamma) \\ \gamma(t) = x \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{(existe et est} \\ \text{unique} \\ \text{par Cauchy} \\ \text{Lipschitz)} \end{matrix}$$

→ Par résultat classique sur les EDO, γ est globale

(on utilise l'hypothèse "au plus linéaire" sur V) donc Φ bien def

→ On a la propriété de flot $\Phi_{t_3, t_1} \circ \Phi_{t_2, t_1} = \Phi_{t_3, t_1}$

$$X_{t_3}(t_2, X_{t_2}(t_1, x)) = X_{t_3}(t_1, x) \quad \begin{matrix} \text{(utiliser l'unicité} \\ \text{de Cauchy-Lipschitz)} \end{matrix}$$

donc en particulier $X_t(s, \cdot) \circ X_s(t, \cdot) = \text{Id}$

→ Par th. de dépendance des EDO en la condition initiale,

$\Phi_{s,t}$ est C^1 en la variable x , et $(\Phi_{s,t})^{-1} = \Phi_{t,s}$ aussi

donc $\Phi_{s,t}$ est un C^1 difféo (et $\frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{\partial}{\partial s} \Phi = V(s, \Phi) \right\}$ donne

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Phi \right) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial V}{\partial x_j}(s, \Phi) \cdot \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_i} - \nabla V \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Phi \right)$$

- Unicité : soit u solution de l'éq. de transport, et x_0 fixé

On pose $v : s \mapsto u(s, \Phi_{s,0}(x_0)) = u(s, X_s(0, x_0))$

et alors $\frac{\partial v}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial t}(s, \Phi_{s,0}(x_0)) + \nabla u(s, \Phi_{s,0}(x_0)) \cdot \frac{\partial \Phi_{s,0}}{\partial s}(x_0)$

$$= \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla u \cdot V \right](s, \Phi_{s,0}(x_0)) = 0$$

donc v est constante, d'où $v(s) = u(0, \Phi_{0,0}(x_0)) = u_0(x_0)$

i.e. $u(s, \Phi_{s,0}(x_0)) = u_0(x_0)$

et par composition par $\Phi_{s,0}^{-1} = \Phi_{0,s}$

$$u(s, x_0) = u_0(\Phi_{0,s}(x_0)) = u_0(X_0(s, x_0))$$

- Existence : on pose $u(t, x) = u_0(\Phi_{0,t}(x_0))$. Alors

$u|_{t=0} = u_0$ et

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \nabla u_0(\Phi_{0,t}(x_0)) \cdot \frac{\partial \Phi_{0,t}}{\partial t}(x_0)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(t, x) = \nabla u_0(\Phi_{0,t}(x_0)) \cdot \frac{\partial \Phi_{0,t}}{\partial x_i}(x_0)$$

donc $\frac{\partial u}{\partial t} + V \cdot \nabla u(t, x) = \nabla u_0(\Phi_{0,t}(x_0)) \cdot \left[\frac{\partial \Phi_{0,t}}{\partial t}(x_0) + \sum V_i(t, x) \cdot \frac{\partial \Phi_{0,t}}{\partial x_i}(x_0) \right]$

On veut calculer $\frac{\partial \Phi_{0,t}}{\partial t}$:

$\Phi_{0,t}(\Phi_{t,s}(x)) = \Phi_{0,s}(x)$ et on dérive en t :

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi_{0,t}(\Phi_{t,s}(x)) + \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Phi_{0,t}(\Phi_{t,s}(x)) \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \Phi_{t,s}^i(x)}_{V_i(t, \Phi_{t,s}(x))} = 0$$

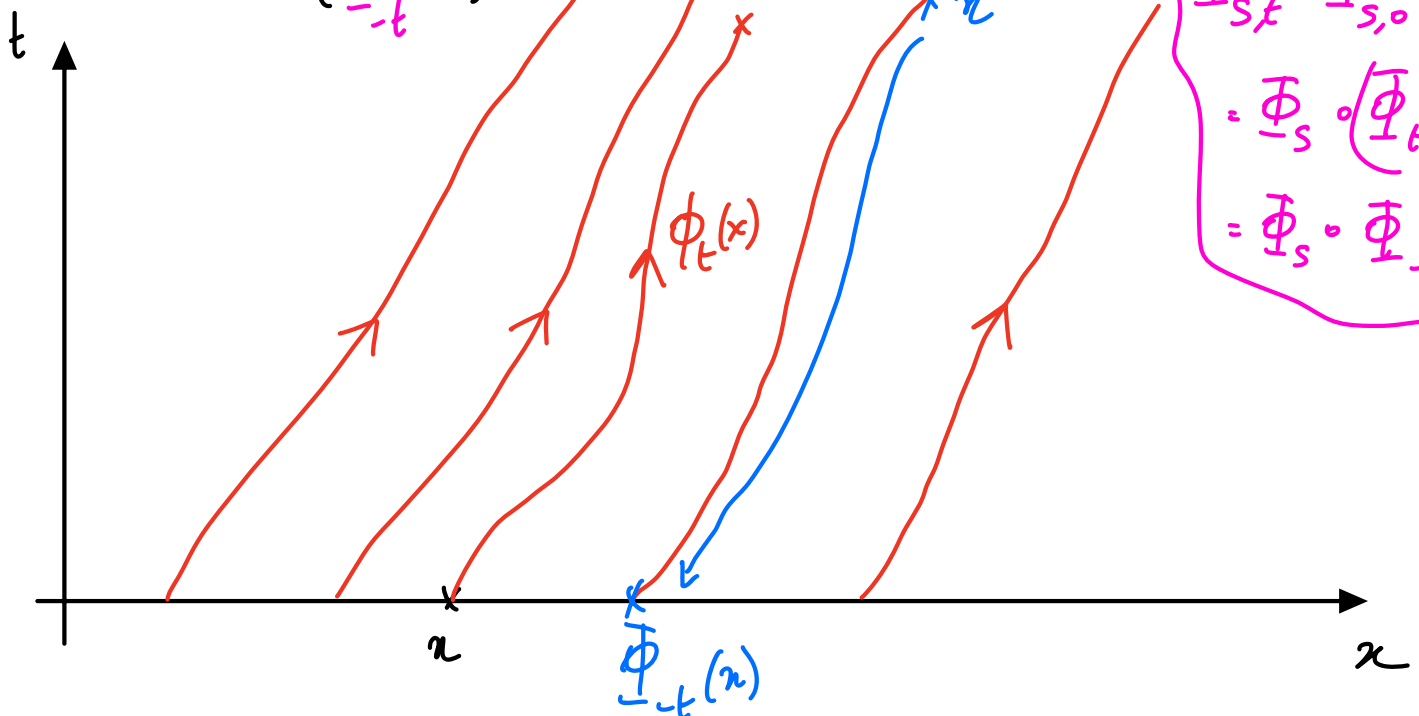
et on fait $t = s$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi_{0,t}(x) + \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Phi_{0,t}(x) \cdot V_i(t, x) = 0$$

□

Ex : Cas $V(t, x) = V(x)$:
$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \Phi_t(x) = V(\Phi_t(x)) \\ \Phi_0(x) = x. \end{cases}$$

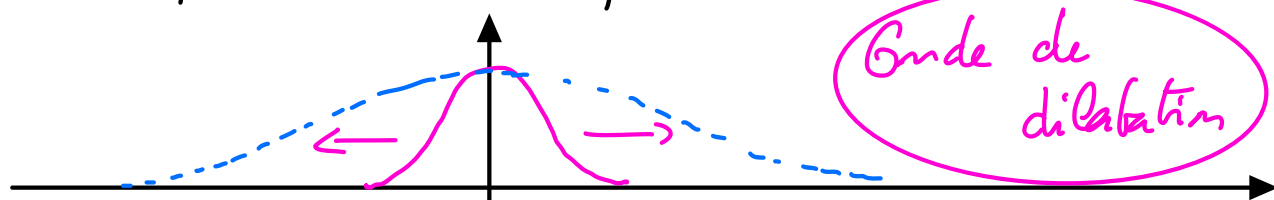
$$\mu(t, x) = \mu_0(\Phi_{-t}(x)).$$



- $x \in \mathbb{R}^2$, $V(x) = \omega \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$

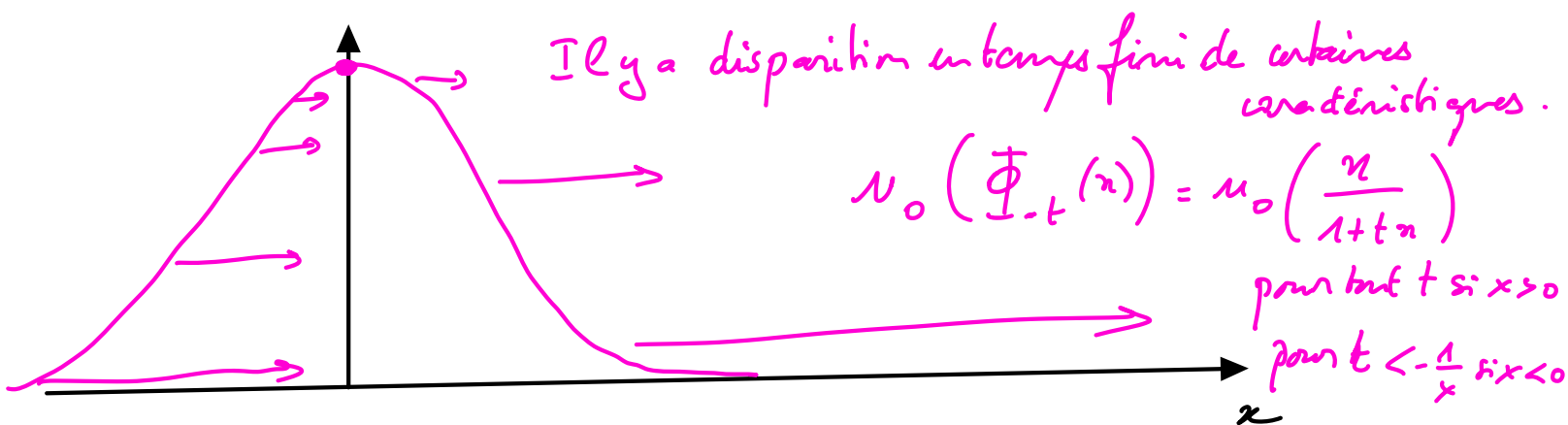
Alors $u(t, x) = u_0(R_{-\omega t} x)$ c'est une rotation.

- Cas $V(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$: $u(t, x) = u_0(x e^{-t})$



- Attention si $V(x) = x^2$ ($x \in \mathbb{R}$) par exemple, l'hypothèse de croissance de V n'est pas satisfaite et les caractéristiques ne sont pas définies pour tout temps.

$\left(\frac{\partial}{\partial t} \Phi = \Phi^2 \text{ donc } \Phi_t(x) = \frac{x}{1 - xt} \text{ si } tx < 1 \right)$



R_g : on peut résoudre l'équation non homogène $\frac{\partial u}{\partial t} + V \cdot \nabla u = f$

par $u(t, x) = u_0(\Phi_0(t, x)) + \int_0^t f(s, \Phi_s(t, x)) ds$.

(on suppose f de classe C^1)

I.2) Solutions faibles

La fonction $u_0(\Phi_{0,t}(x))$ (penser $u_0(x-tV)$)
a du sens sans régularité sur u_0 . Peut-on généraliser
ce qui précède sans savoir que u_0 est C^1 ?

R_f: dans le cas non linéaire on voit que même si
on part de u_0 régulière, il peut arriver que
 $u|_{t=t_0}$ ne soit plus régulière. C'est donc une autre
motivation de généraliser la notion de solution pour u_0 non

HEURISTIQUE: on écrit $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + V \cdot \nabla u = 0 & (u \text{ supposee } \overset{\text{régulière}}{C^1}) \\ u|_{t=0} = u_0 \end{cases}$
 $t \geq 0$
 $x \in \mathbb{R}^m$

et on voudrait trouver une formulation équivalente sans
avoir à dériver u .

$$\text{soit } \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m)$$
$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^m} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + V \cdot \nabla u \right) \varphi = 0$$

mais
$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^m} \frac{\partial u}{\partial t} \varphi = \int_{\mathbb{R}^m} [u \varphi]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^m} [-u_0 \varphi(0, \cdot) - \int_0^{+\infty} u \frac{\partial \varphi}{\partial t}]$$

et
$$\int_{\mathbb{R}^m} (V \cdot \nabla u) \varphi = \sum_i \int_{\mathbb{R}^m} \frac{\partial u}{\partial x_i} V_i \varphi = - \sum_{i=1}^m \int_{\mathbb{R}^m} u \frac{\partial}{\partial x_i} (V_i \varphi)$$

Déf : On suppose $u_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^m)$ et $V \in C^1$.

On appelle solution faible de
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + V \cdot \nabla u = 0 \\ u|_{t=0} = u_0 \end{cases}$$

une fonction $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m)$ tq

$\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m),$

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^m} u \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} [V \varphi] \right] + \int_{\mathbb{R}^m} u_0 \varphi(0, \cdot) = 0$$

Quand on manipule une notion faible de solution, on veut tjrs vérifier deux propriétés de "consistance" / "légitimité" de cette notion : les voici :

Prop : Si $u \in C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ est solution (classique) de
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + V \cdot \nabla u = 0 \\ u|_{t=0} = u_0 \end{cases}$$
 Alors u est solution faible.

Preuve : C'est juste de reprendre l'heuristique ci-dessus $\square$

et

Prop : si u est solution faible et est $C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ alors u est solution classique.

Preuve : On reprend le calcul précédent "à l'envers" :

$\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$,

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} u \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \varphi V \right] + \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(0, \cdot) u_0 = 0$$

$$- \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{\partial u}{\partial t} + V \cdot \nabla u \right] \varphi + \int_{\mathbb{R}^n} [u_0 - u(0, \cdot)] \varphi(0, \cdot)$$

• pour φ à support compact dans $]0, +\infty[\times \mathbb{R}^n$, par le lemme fondamental du calcul de variations, $\frac{\partial u}{\partial t} + V \cdot \nabla u = 0$ sur $]0, +\infty[\times \mathbb{R}^n$

• Ainsi on récupère $\int_{\mathbb{R}^n} [u_0 - u(0, \cdot)] \varphi(0, \cdot) \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$

donc $u(0, \cdot) = u_0$ (ici $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ on peut poser $\varphi : \chi(t) \varphi(x)$ où $\chi(0) = 1$ et $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+)$) $\square$

Rq : Autrement dit, les notions de solution sont équivalentes sous réserve de régularité.

Th : On suppose $V \in C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ et $\exists k, \forall (t, x), |V(t, x)| \leq k(1+|x|)$
 et $u_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$

Alors il existe une unique solution faible $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$

(au sens "p.p.")
 qui est donnée par

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + V \cdot \nabla u = 0 \\ u|_{t=0} = u_0 \end{cases} \quad u(t, x) = u_0(\Phi_{0,t}(x))$$

Preuve : • Unicité : comme le pb est linéaire, on peut supposer $w \in L^1_{loc}$ sol faible de

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} + V \cdot \nabla w = 0 \\ w|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

i.e. $\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n), \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} V \varphi \right]}_{\psi} w = 0$

Etant donné $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ on cherche à montrer qu'il

existe $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ t.q. $\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div}(V \varphi) = \psi$ (il s'agit d'une équation dite "duale")
 et alors on pourra conclure $w = 0$ p.p.

Détails : $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ donné : on cherche $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$

$$\text{tz } \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div}(V\varphi) = \psi$$

• Cas V constant : on a une éq. de transport avec second membre

$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + V \cdot \nabla \varphi = \psi$. Par formule à la Duhamel, les solutions sont $\varphi(t, x) = \varphi_0(x - tV) + \int_0^t \psi(s, x - (t-s)V) ds$ (*)
où φ_0 est à déterminer de sorte que $\operatorname{supp} \varphi$ est compact.

"Analyse" : on observe que (*) implique $\varphi_0(x) = \varphi(t, x + tV) - \int_0^t \psi(s, x + sV) ds$

et si φ est à support compact, $t \rightarrow +\infty$ donne $\varphi_0(x) = - \int_0^{+\infty} \psi(s, x + sV) ds$

"Synthèse" : pour ce φ_0 on a $\varphi(t, x) = - \int_t^{+\infty} \psi(s, x - (t-s)V) ds$ qui est bien
 $C_c^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$

• Cas général : on doit résoudre

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + V \cdot \nabla \varphi + (\operatorname{div} V) \varphi = \psi \quad \text{(qui est un cas plus général d'équation de transport)}$$

et la solution à support compact

s'écrit $-\int_t^{+\infty} \psi(s, \Phi_s(t, x)) \exp\left(\int_t^s (\operatorname{div} V)(\tau, \Phi_\tau(t, x)) d\tau\right) ds$
qui est C_c^∞

Rq : pour voir d'où vient cette formule, on regarde $Y(s) = \varphi(s, \Phi_s(t, x))$

et on constate $\frac{d}{ds} Y(s) = \psi(s, \Phi_s) - (\operatorname{div} V)(s, \Phi_s) \cdot Y(s)$ qu'on résout par variation de la

• Existence : maintenant on doit montrer que constante
 $(t, x) \mapsto u_0(\underbrace{\Phi_0(t, x)}_y)$ est solution faible :

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^m} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} V \varphi \right] u_0(\underbrace{\Phi_0(t, x)}_y) \quad \left\{ \begin{array}{l} y = \Phi_0(t, x) \\ x = \Phi_t(0, y) \\ dx = \det D\Phi_t(0, y) dy \end{array} \right.$$

$$= \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^m} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} V \varphi \right] (\Phi_t(0, y)) \cdot \det(D\Phi_t(0, y)) u_0(y) dy$$

On pose $J_t(y) = \det(D\Phi_t(0, y))$

(Rq $\det D\Phi_{s,t} > 0$
 car $t \mapsto \det D\Phi_{s,t}$ est C^0 .
 et $\det D\Phi_{s,s} = 1$)

Alors $\left(\frac{\partial J}{\partial t} = \operatorname{div} V(t, \Phi_t(0, y)) \cdot J_t(y) \right)$

$J|_{t=0} = 1$
 (voir ci-dessous)

mais alors

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div}(V \varphi) \right] (\Phi_{t,0}) \cdot J_t$$

$$= \underbrace{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, \Phi_{t,0}) + \underbrace{(\nabla \varphi \cdot V)(t, \Phi_{t,0})}_{\nabla \varphi(t, \Phi_{t,0}) \cdot \frac{\partial \Phi_{t,0}}{\partial t}} \right) J_t}_{\frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, \Phi_{t,0})} + \underbrace{(\operatorname{div} V)(t, \Phi_{t,0}) J_t}_{\frac{\partial J_t}{\partial t}}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} [\varphi(t, \Phi_{t,0}) J_t]$$

et donc finalement avec le th. de Fubini

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^m} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} V \varphi \right) u_0(\phi_{0,t}(y)) dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} \left[\varphi(t, \phi_{t,0}) J_t \right] \right) u_0(y) dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^m} - \varphi(0, \underbrace{\phi_{0,0}(y)}_y) \underbrace{J_0(y)}_1 u_0(y) dy$$

d'où le résultat

□

$$(*) J_t(y) = \det(D\Phi_t(0,y))$$

$$\frac{\partial J_t(y)}{\partial t} = D \det[D\Phi_t(0,y)] \cdot \frac{\partial}{\partial t} (D\Phi_t(0,y))$$

$$= J_t(y) \cdot \operatorname{Tr} \left[(D\Phi_t(0,y))^{-1} \cdot D \left(\frac{\partial \Phi_t}{\partial t}(0,y) \right) \right]$$

$$\begin{aligned} D \det(A)(H) &= \operatorname{Tr}({}^t(\operatorname{com} A) \cdot H) \\ &= (\det A) \operatorname{Tr}(A^{-1} \cdot H) \\ &\quad \text{si } A \in GL_n \end{aligned}$$

mais Φ_t est défini par $\frac{\partial}{\partial t} \Phi_t(0,y) = V(t, \Phi_t(0,y))$

donc $\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial y_i} \Phi_t = DV(t, \Phi_t) \cdot \frac{\partial}{\partial y_i} \Phi_t \quad \forall i$

on sait
que c'est
différentiable

$$= J_t(y) \operatorname{Tr} (D\Phi_t^{-1} \cdot DV(t, \Phi_t) \cdot D\Phi_t) = J_t(y) \operatorname{div} V(t, \Phi_t)$$

II) Lois de conservation scalaires

Ces sont des équations de la forme

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} (F(u)) = 0 & \text{pour } (t, x) \in [0, T[\times \mathbb{R}^m \\ u|_{t=0} = u_0. \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{et } F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m \\ \text{est appelé vecteur flux.} \end{array}$$

Applications : modélisation du trafic routier

Rq : • Sous réserve de régularité, l'équation se réécrit

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^m F_i'(u) \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0$$

On parle d'équation quasi-linéaire car ça reste linéaire en les dérivées "d'ordre maximal", ici 1.

La non-linéarité agit seulement sur les dérivées d'ordre

$$l - 1 \quad (= 0 \text{ ici})$$

↑
ordre de l'EDP

• Dans la suite, on se contentera du cas $m=1$, i.e.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (f(u)) = 0 \quad (\text{c'est pour simplifier, la}$$

majorité de ce qui suit fonctionne pour $n \geq 2$)

Un exemple célèbre est l'équation de Burgers :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0$$

qui s'écrit (sous réserve de régularité)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \boxed{u} \frac{\partial}{\partial x} u = 0 \text{ qu'on peut imaginer}$$

comme une équation de transport où la vitesse dépend de u .

II.1) Solutions classiques.

Th : Soit $u_0 \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ tq $u_0' \in L^\infty(\mathbb{R})$.

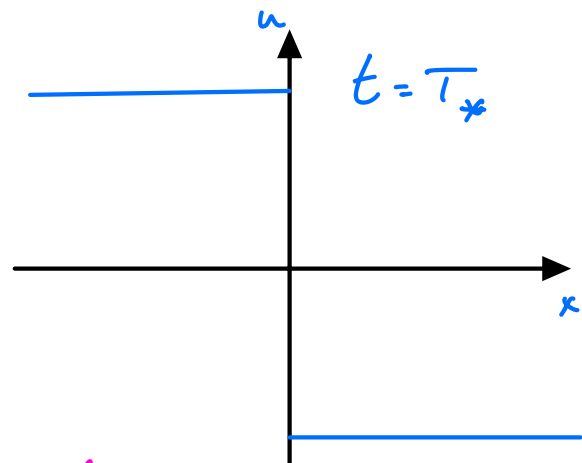
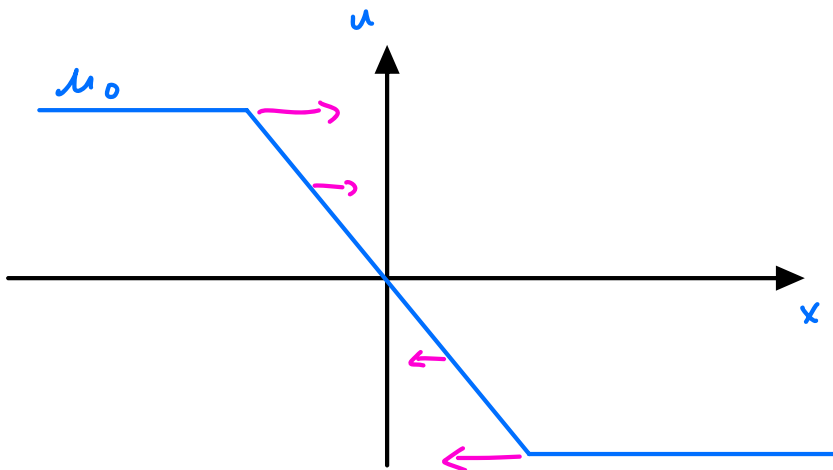
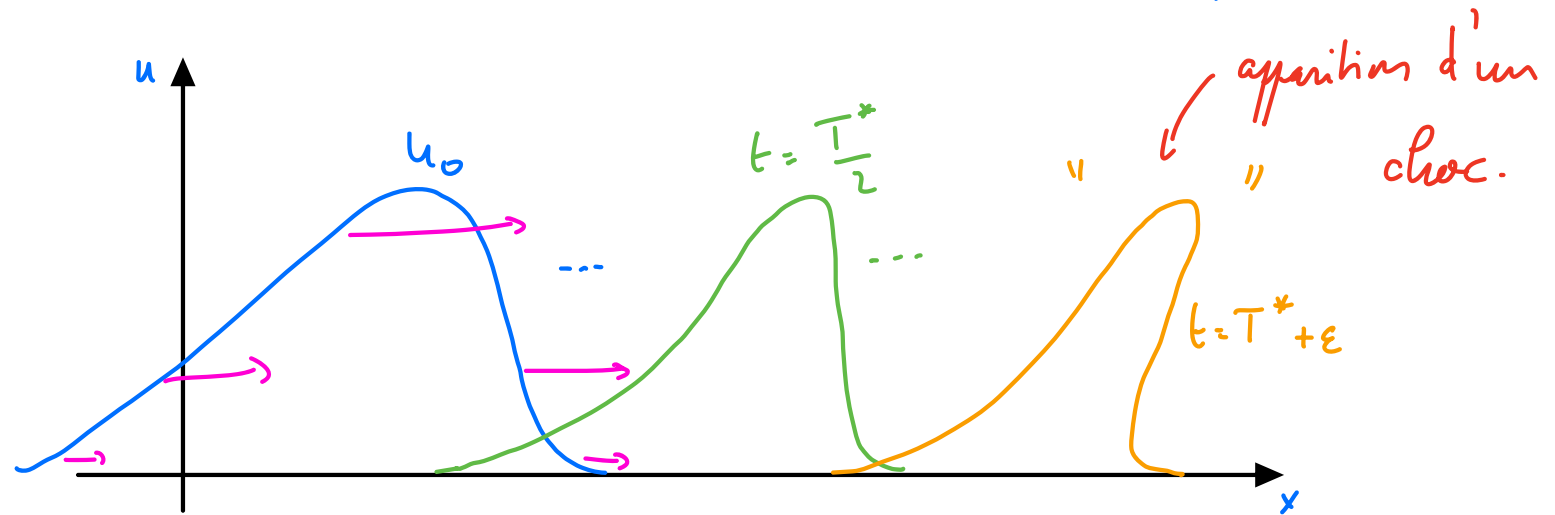
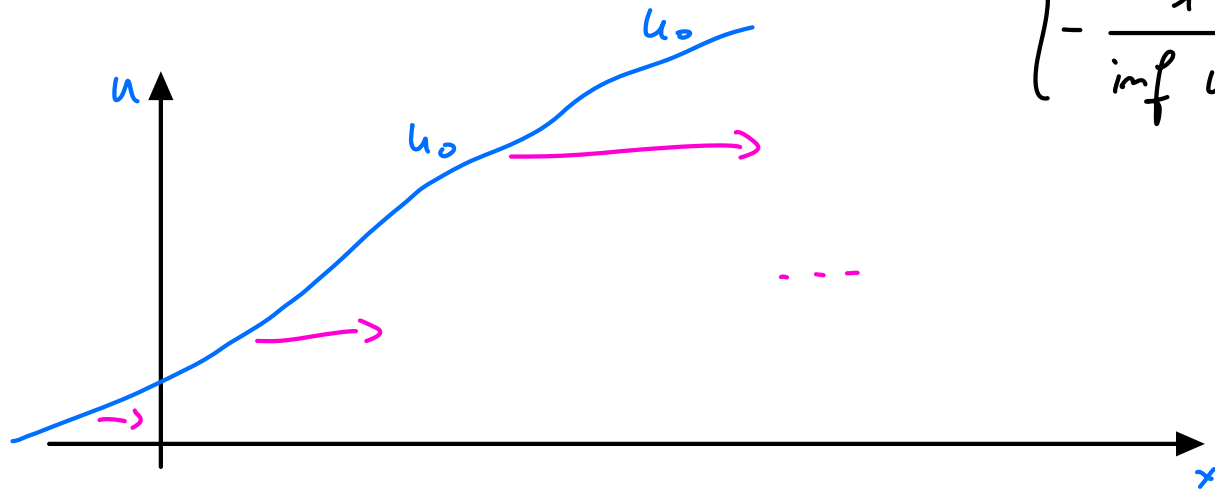
On suppose $f \in C^2(\mathbb{R})$ et on pose

$$T^* = \begin{cases} +\infty & \text{si } f' \circ u_0 \text{ est croissante} \\ -\frac{1}{\inf_{\mathbb{R}} (f' \circ u_0)}, & \text{sinon} \end{cases} \quad \in]0, +\infty[$$

Alors :

- Il existe une unique solution classique sur $[0, T^*[$
- Il n'existe pas de solution classique sur $[0, T[$ si $T > T^*$.

Ex : pour l'équation de Burgers, $T^* = \begin{cases} +\infty & \text{si } u'_0 \geq 0 \\ -\frac{1}{\inf u'_0} & \text{sinon.} \end{cases}$



(temps fini)

On parle d'apparition de choc V. nécessité de prendre en compte des discontinuités dans la notion de solution.

Preuve : • Analyse : supposons que u est solution classique sur $[0, T[$. Comme f est C^1 , on a

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + f'(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & \forall t < T \\ & \forall x \\ u|_{t=0} = u_0 \end{cases}$$

On utilise la méthode des caractéristiques, i.e. on introduit

$$(\Phi_t)_{t < T} \text{ défini par } \begin{cases} \frac{d}{dt} \Phi_t(x) = f'(u(t, \Phi_t(x))) & \forall t < T \\ & \forall x \\ \Phi_0(x) = x \end{cases} \quad \triangle ! \text{ système non autonome}$$

Ainsi u est constante le long des caractéristiques $\Phi_t = \Phi_{t,0}$ ici.

$$\left(\frac{d}{dt} [u(t, \Phi_t(x))] = \left[\frac{\partial u}{\partial t} + f'(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right](t, \Phi_t(x)) = 0 \right)$$

donc $\forall t \in [0, T[$, $u(t, \Phi_t(x)) = u_0(x)$, mais alors

l'équation des caractéristiques devient $\frac{d}{dt} \Phi_t(x) = 0$

qui se résout facilement par $\Phi_t(x) = x + t f'(u_0(x))$ (*)

On remarque que $T^* \in]0, +\infty]$

$$\text{et } \frac{d}{dx} \Phi_t(x) = 1 + t (f'(u_0))'(x) > 0 \text{ pour tout } t \in [0, T^*[.$$

Les caractéristiques sont toujours des droites (un peu comme dans le cas $\partial_t u + V \partial_x u = 0$ avec V constant mais les droites ne sont plus forcément parallèles)

(dans le cas $f' \circ u_0$ non croissante, $\inf_{\mathbb{R}} (f' \circ u_0)' < 0$

$$\text{et } 1 + t (f' \circ u_0)' \geq 1 + t \inf_{\mathbb{R}} (f' \circ u_0)' > 1 + T^* \inf_{\mathbb{R}} (f' \circ u_0)' = 0.$$

mais comme $\Phi_t(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \pm\infty$ ($f' \circ u_0$ borné)

Φ_t est un C^1 -difféo de $\mathbb{R}$.

Ainsi $u(t, x) = u_0(\Phi_t^{-1}(x)) \quad \forall t < T^* \quad \forall x$

et en particulier il y a unicité de la solution.

• Pour l'existence, on pose $u(t, x) = u_0(\Phi_t^{-1}(x))$ pour $t < T^*$
 $x \in \mathbb{R}$
qui est bien de classe C^1 et on a $u(0, x) = u_0(x)$

$$\text{et } \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = u_0'(\Phi_t^{-1}(x)) \cdot \frac{d}{dt}(\Phi_t^{-1}(x))$$

$$\frac{\partial}{\partial x} u(t, x) = u_0'(\Phi_t^{-1}(x)) \cdot \frac{d}{dx}(\Phi_t^{-1}(x))$$

$$\text{mais } \Phi_t(x) = x + t(f' \circ u_0)(x)$$

$$\text{donc } x = \Phi_t^{-1}(x) + t(f' \circ u_0)(\Phi_t^{-1}(x)) \text{ donne}$$

en dérivant
ent

$$0 = \frac{d}{dt} \Phi_t^{-1}(x) + (f' \circ u_0)(\Phi_t^{-1}(x)) + t(f' \circ u_0)'(\Phi_t^{-1}(x)) \cdot \frac{d}{dt} \Phi_t^{-1}(x)$$

$$\text{i.e. } \frac{d}{dt} \Phi_t^{-1}(x) = \frac{-(f' \circ u_0)(\Phi_t^{-1}(x))}{1 + t(f' \circ u_0)'(\Phi_t^{-1}(x))}$$

en dérivant
en x

$$\text{et } 1 = \frac{d}{dx} \Phi_t^{-1}(x) + t (f' \circ u_0)'(\Phi_t^{-1}(x)) \cdot \frac{d}{dx} (\Phi_t^{-1}(x))$$

$$\text{i.e. } \frac{d}{dx} \Phi_t^{-1}(x) = \frac{1}{1 + t (f' \circ u_0)'(\Phi_t^{-1}(x))}$$

donc finalement

$$\frac{\partial u}{\partial t} + f'(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \left\{ u'_0 \cdot \left[\frac{-f' \circ u_0}{1 + t (f' \circ u_0)'} \right] + (f' \circ u_0) u'_0 \cdot \frac{1}{1 + t (f' \circ u_0)'} \right\} (\Phi_t^{-1}(x))$$
$$= 0.$$

• Il nous reste à montrer qu'il n'y a pas de solutions classiques sur $[0, T]$ si $T > T^*$. (quitte à changer T en $T - \varepsilon$, ça ne change rien de prendre $[0, T]$ ou $[0, T[$)
Soit $T > T^*$. On suppose par l'absurde qu'il existe une solution

classique sur $[0, T]$. Alors on peut définir $(\Phi_t(x))$ flot de $f' \circ u$ sur $[0, T]$.

Mais par def de l'imf, $\left. \begin{array}{l} \text{il existe } x_T \text{ tq} \\ \text{Hais par def de l'imf,} \end{array} \right\} (f' \circ u_0)'(x_T) + 1 < 0 \text{ i.e. } \partial_x \Phi_T(x_T) < 0$

or $\Phi_T(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm \infty} \pm \infty$, donc Φ_T n'est pas injective.

i.e il existe

(par continuité, si Φ_T était injective elle serait strict. monotone, ici strict. croissante)

$$x_0 < x_1 \text{ tq } \Phi_T(x_0) = \Phi_T(x_1).$$

ce qui contredit l'unicité des solutions dans Cauchy-Lipschitz $\square$

Rq : On peut en fait montrer un résultat plus précis,
 précisément $\lim_{t \rightarrow T^*} \left\| \frac{\partial u}{\partial x}(t, \cdot) \right\|_{\infty} = +\infty$

En effet ^{dans le cas $u \in C^2$} on dérive en x l'éq. $\frac{\partial}{\partial t} u + f'(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0$

$$\text{et } \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + f''(u) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + f'(u) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

On pose $w(t) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, \Phi_t(x))$ ^{on pose $w = \frac{\partial u}{\partial x}$}
 l'éq. s'écrit $\frac{\partial}{\partial t} w + f'(u) \frac{\partial w}{\partial x} = -f''(u) w^2$

$$\text{et alors } \frac{d}{dt} w(t) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x}(t, \Phi_t(x)) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, \Phi_t(x)) \cdot \underbrace{\frac{\partial \Phi_t(x)}{\partial t}}_{f'(u(t, \Phi_t(x)))}$$

$$\left(\text{sol de } y' = -c y^2 : \frac{1}{\frac{1}{y_0} + ct} \right) = -f''(\underbrace{u(t, \Phi_t(x))}_{u_0(x)}) w^2(t)$$

$$\text{définie jusqu'à } T^*(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si} \\ -\frac{1}{f''(u_0(x)) \cdot u'_0(x)} = -\frac{1}{(f'(u_0))'(x)} & \text{si } (f'(u_0))'(x) < 0 \end{cases}$$

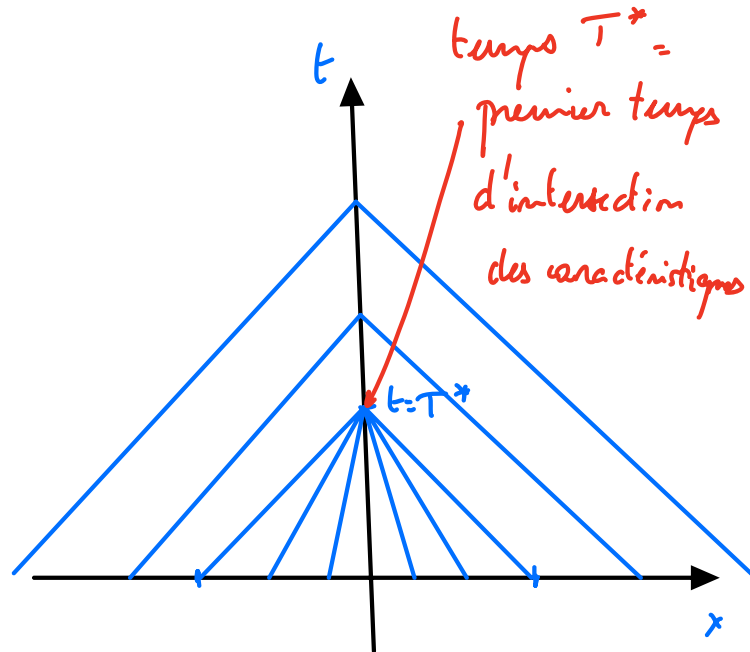
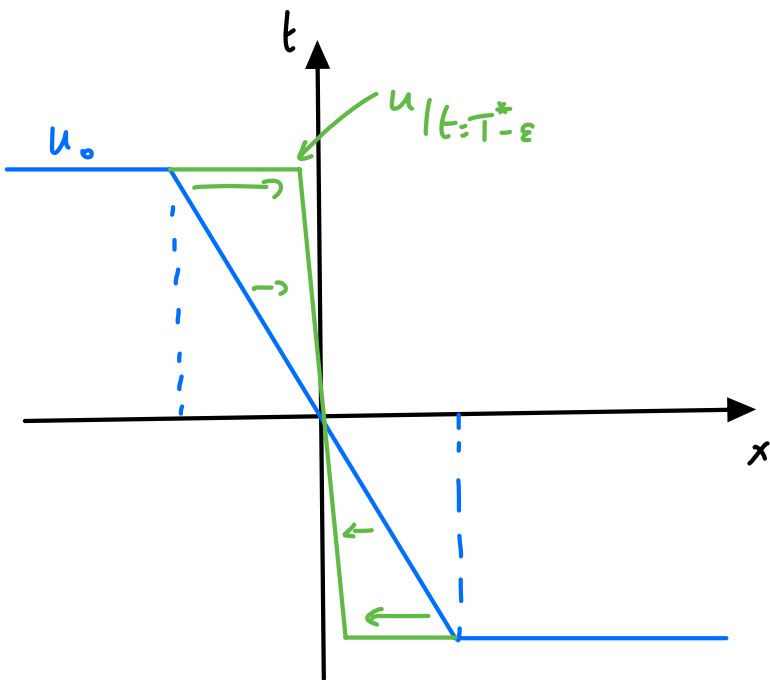
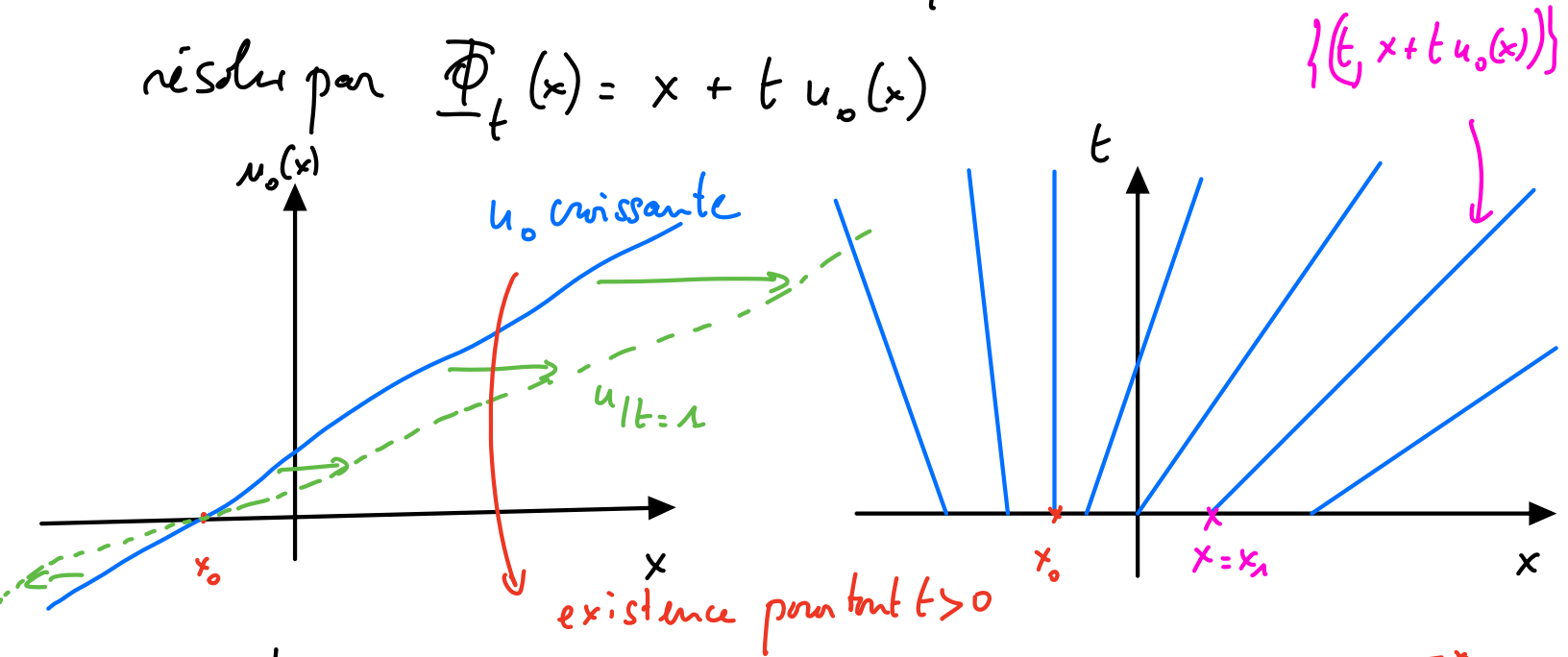
et donc $T^* = \inf_x T^*(x)$: il existe x_n tq $T^*(x_n) \searrow T^*$
 et $t_n \in [T^*, T^*(x_n)]$

tq $\frac{\partial u}{\partial x}(t_n, \Phi_{t_n}(x_n)) \rightarrow +\infty$ ce qui suffit à
 conclure.

Ex : Prenons l'exemple de l'éq. de Burgers $\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$

L'équation des caractéristiques est
$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \Phi_t(x) = u(t, \Phi_t(x)) \\ \Phi_t(x) = x \end{cases}$$

résolu par $\Phi_t(x) = x + t u_0(x)$



II.2) Solutions faibles

Heuristique :

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \varphi \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (f(u)) \right] \\ = - \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial}{\partial t} \varphi \right) u + \left(\frac{\partial}{\partial x} \varphi \right) f(u) - \int_{\mathbb{R}} \varphi(0, x) u_0(x) dx$$

Déf : On suppose $f \in C^1(\mathbb{R})$ et $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$.

On dit que u est solution faible de
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (f(u)) = 0 \\ u|_{t=0} = u_0 \end{cases} \quad \text{sur } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$$

si $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ et

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}), \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \left(u \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f(u) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \\ + \int_{\mathbb{R}} \varphi(0, x) u_0(x) dx = 0$$

Rq : • On vérifie facilement que $\begin{cases} \text{sol classique} \Rightarrow \text{sol faible} \\ \text{sol faible et régulière} \Rightarrow \text{sol classique} \end{cases}$

• On demande u_0/u bornée pour avoir $f(u) \in L^1_{loc}$
(ce n'est pas optimal, mais ça simplifiera aussi l'existence.
On peut aussi demander $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$ et $u \in C^0(\mathbb{R}_+, L^1(\mathbb{R})) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$

Y a-t-il existence / unicité de solution ?

Analyse d'un exemple: le problème de Riemann:

C'est le cas où $u_0(x) = \begin{cases} u_d & \text{si } x > 0 \\ u_g & \text{si } x < 0 \end{cases}$ où $u_d \neq u_g$ sont des constantes.

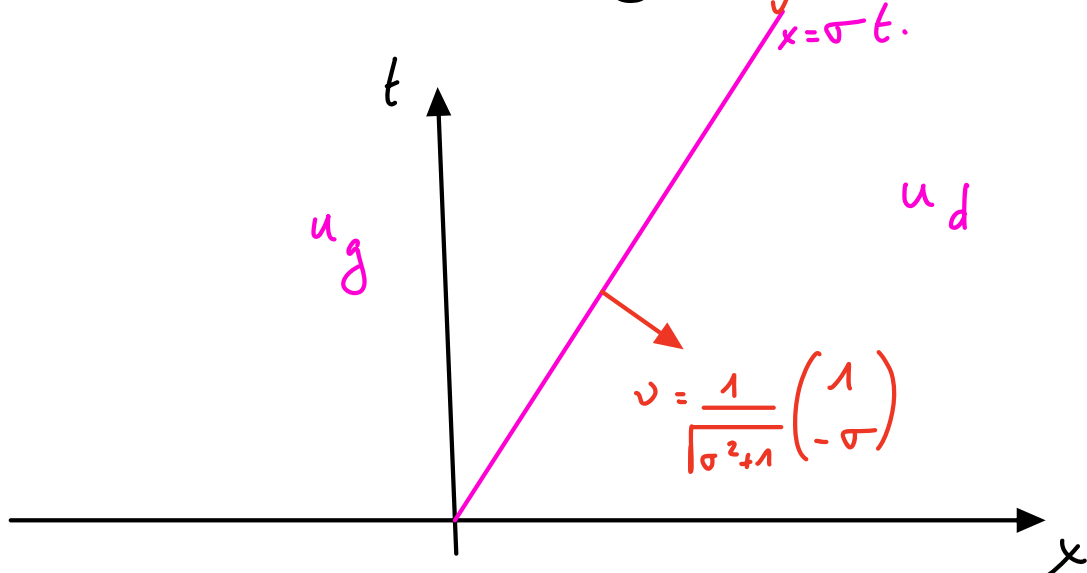
(Autrement dit on cherche à comprendre ce qu'il se passe à partir du moment où il y a une discontinuité)

Lemme: On pose $u(t, x) = \begin{cases} u_d & \text{si } x > \sigma t \\ u_g & \text{si } x < \sigma t. \end{cases}$

Alors u est solution faible de $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(f(u)) = 0 \\ u|_{t=0} = u_0 \end{cases}$

$\widehat{=}$

$$\sigma = \frac{f(u_d) - f(u_g)}{u_d - u_g} \quad \left. \vphantom{\frac{f(u_d) - f(u_g)}{u_d - u_g}} \right\} \begin{array}{l} \text{Condition de} \\ \text{Rankine-Hugoniot} \end{array}$$



Preuve: Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \bullet \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} u \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx dt &= \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \left(u_g \mathbb{1}_{x < \sigma t} + u_d \mathbb{1}_{x > \sigma t} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial t} \\ &= u_g \left(\int_{\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{x < \sigma t} \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt dx \right) + u_d \left(\int_{\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{x > \sigma t} \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt dx \right) \end{aligned}$$

avec $\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{x < \sigma t} \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt = \begin{cases} -\varphi(\frac{x}{\sigma}, x) & \text{si } \sigma > 0 \text{ et } x > 0 \\ -\varphi(0, x) & \text{si } \sigma > 0 \text{ et } x < 0 \\ -\varphi(0, x) \mathbb{1}_{x < 0} & \text{si } \sigma = 0 \\ 0 & \text{si } \sigma < 0 \text{ et } x > 0 \\ \varphi(\frac{x}{\sigma}, x) - \varphi(0, x) & \text{si } \sigma < 0 \text{ et } x < 0 \end{cases}$

$\frac{x}{\sigma} > t$

On suppose par exemple $\sigma > 0$:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} u \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx dt &= u_g \left[\int_0^{+\infty} -\varphi(\frac{x}{\sigma}, x) dx + \int_{-\infty}^0 -\varphi(0, x) dx \right] \\ &\quad + u_d \left[\int_0^{+\infty} \varphi(\frac{x}{\sigma}, x) - \varphi(0, x) dx \right] \\ &= \int_0^{+\infty} \varphi(t, \sigma t) \sigma dt [u_d - u_g] - \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \varphi(0, x) dx \end{aligned}$$

$t = \frac{x}{\sigma}$
 $dt = \frac{dx}{\sigma}$

$$\begin{aligned} \bullet \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} f(u) \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= f(u_g) \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{x < \sigma t} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dt + f(u_d) \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{x > \sigma t} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dt \\ &= f(u_g) \int_0^{+\infty} \varphi(t, \sigma t) dt + f(u_d) \int_0^{+\infty} -\varphi(t, \sigma t) dt \end{aligned}$$

D'ici la CNS $\sigma(u_d - u_g) = f(u_d) - f(u_g)$

Détaillons le cas $\sigma = 0$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} u \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt dx &= u_g \int_{-\infty}^0 -\varphi(0, x) dx + u_d \int_0^{+\infty} -\varphi(0, x) dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \varphi(0, x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} f(u) \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dt &= \int_0^{+\infty} f(u_g) \varphi(t, 0) + f(u_d) (-\varphi(0, t)) dt \\ &= [f(u_g) - f(u_d)] \int_0^{+\infty} \varphi(t, 0) dt \end{aligned}$$

d'ici la CNS $f(u_g) - f(u_d) = 0$.

Le cas $\sigma < 0$ est similaire au cas $\sigma > 0$

□

Rq: On peut aussi appliquer la formule des sauts: • version "1D"

$$\text{On fixe } x \text{ et on suppose } \sigma > 0: u(t, x) = \begin{cases} u_d & \text{si } \frac{x}{\sigma} > t \\ u_g & \text{si } \frac{x}{\sigma} < t \end{cases}$$

$$\text{donc } \frac{\partial u}{\partial t} = (u_d - u_g) \delta_{t=\frac{x}{\sigma}} = (u_g - u_d) \sigma \delta_{x=\sigma t} \text{ car}$$

$$\text{On fixe } t: \text{ alors } \frac{\partial f(u)}{\partial x} = (f(u_d) - f(u_g)) \delta_{x=\sigma t} \quad \left\langle \delta_{t=\frac{x}{\sigma}}, \varphi \right\rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi\left(\frac{x}{\sigma}, x\right) dx$$

$$\text{d'ici } \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (f(u)) = 0 \text{ sur } \mathcal{D}'([0, +\infty[\times \mathbb{R}) \Leftrightarrow f(u_d) - f(u_g) = \sigma(u_d - u_g) \left[\sigma \int_{\mathbb{R}} \varphi(y, \sigma y) dy \right]$$

• Version "2d" (voir BONY): $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rangle + (f_+ - f_-) v_i d\mathcal{H}^1_{\Gamma}$

et donc ici $\frac{\partial u}{\partial t} = \underbrace{\left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \right\}} + (u_d - u_g) \left(\frac{-\sigma}{\sqrt{1+\sigma^2}} \right) d\mathcal{H}_{1\sigma}^1$

et $\frac{\partial f(u)}{\partial x} = \underbrace{\left\{ \frac{\partial f(u)}{\partial x} \right\}} + (f(u_d) - f(u_g)) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\sigma^2}} d\mathcal{H}_{1\sigma}^1$
 parties régulières
 (nulles)

Conséquence : il n'y a pas unicité des solutions faibles

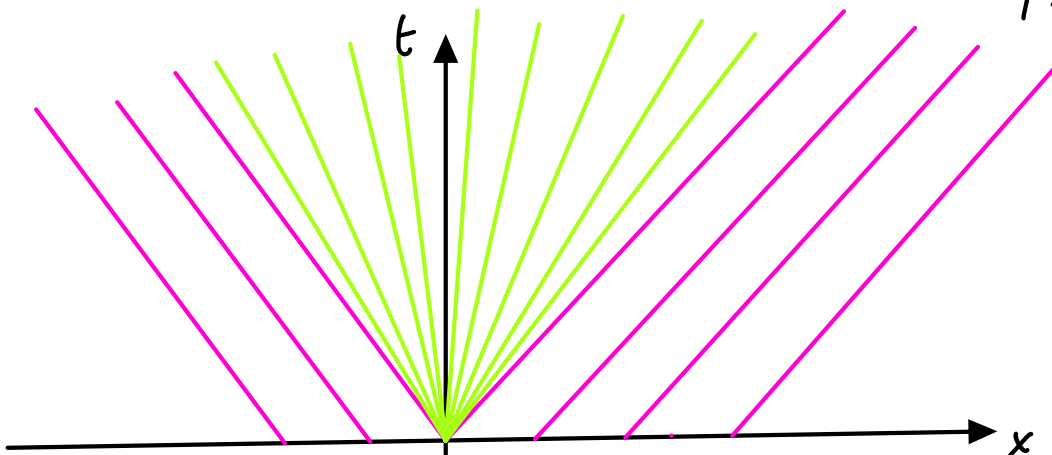
Preons par exemple le pb de Riemann pour l'équation de Burgers

i.e.
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0 \\ u|_{t=0} = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ +1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{cases}$$

- La fonction $u(t, x) = u_0(x)$ est solution faible car elle remplit la condition de Rankine-Hugoniot : $\frac{f(u_d) - f(u_g)}{u_d - u_g} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 1^2 - \frac{1}{2}(-1)^2}{1 - (-1)} = 0$

- On peut construire une autre solution : $u_d - u_g$ (faible) $\frac{1}{1+(-1)}$

les caractéristiques sont $\Phi_t(x) = x + t u_0(x) = \begin{cases} x+t & \text{si } x > 0 \\ x-t & \text{si } x < 0 \end{cases}$



mais sur $\{(t,x) \mid -t \leq x \leq t\}$ on a possibilité d'avoir d'autres définitions que la précédente : on pose

$$u(t,x) = \begin{cases} +1 & \text{si } x \geq t \\ \frac{x}{t} & \text{si } t > 0 \text{ et } -t < x < t \\ -1 & \text{si } x \leq -t \end{cases}$$

(on parle de solution autosimilaire car elles ne dépendent que de $\frac{x}{t}$)

Cette fonction est continue et régulière par morceaux (si $t > 0$) donc ses dérivées au sens des distributions (à l'ordre 1) sont ses dérivées classiques (où on ne s'inquiète pas des zones où elle n'est pas C^1)

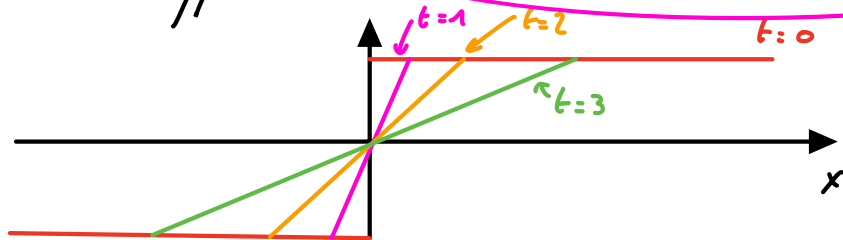
et elle est constante dans $\{(t,x), x > t\}$ et $\{(t,x), x < -t\}$

il reste à voir que $\frac{\partial}{\partial t} u + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0$ sur $\{(t,x), -t < x < t\}$

$$-\frac{x}{t^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{t^2} = 0 \quad \checkmark$$

Rq : • De telles solutions sont appelées

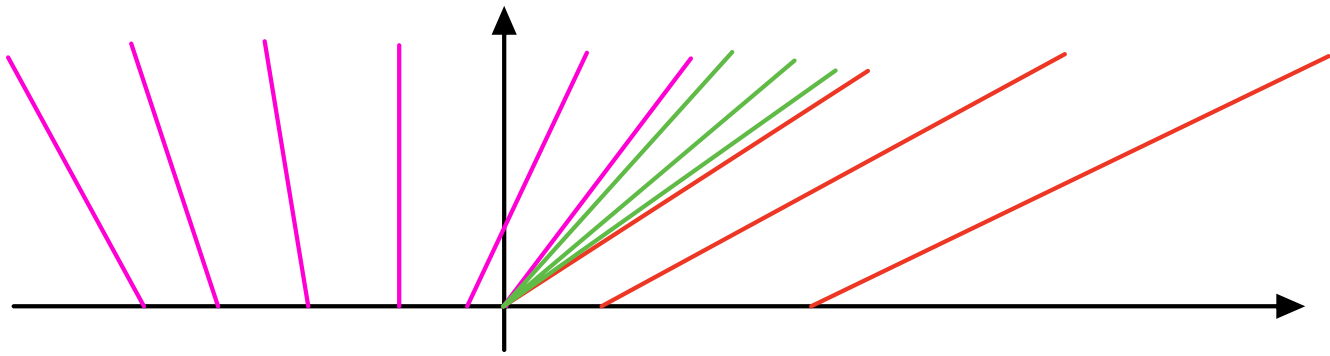
ondes de raréfaction ou de détente



• plus généralement, ceci est possible pour le pb de Riemann

si $u_g < u_d$ et si f' est strictement croissante :

en effet on peut alors vérifier que $u(t,x) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < f'(u_g)t \\ (f')^{-1}\left(\frac{x}{t}\right) & \text{si } f'(u_g)t \leq x \leq f'(u_d)t \\ u_d & \text{si } x > f'(u_d)t \end{cases}$ est solution.



↳ Pour viser un problème bien posé, il faut introduire des conditions supplémentaires au fait d'être solution faible.

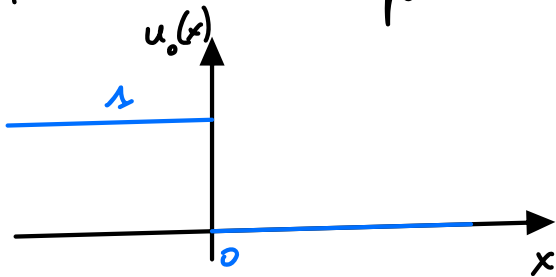
Rq : On peut avoir des chocs sur des courbes aussi :

Si on a une discontinuité sur $\Gamma = \{(t, x), x = \sigma(t)\}$

avec $\sigma \in C^1$ (et on ne suppose plus u constante à gauche et à droite, mais on la suppose régulière et solution sur chaque ensemble), pour être une solution faible on

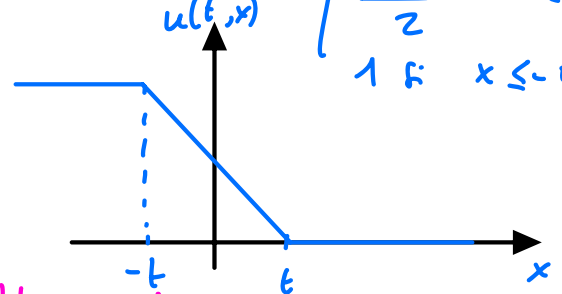
demande $f(t, \sigma(t)^+) - f(t, \sigma(t)^-) = \sigma'(t) [u(t, \sigma(t)^+) - u(t, \sigma(t)^-)]$

Rq : Modèle de trafic routier : $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u(1-u)) = 0$



Sol faible 1 : $u(t, x) = u_0(x)$

Sol faible 2 : $u(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq t \\ \frac{1-x/t}{2} & \text{si } -t \leq x \leq t \\ 1 & \text{si } x \leq -t \end{cases}$



La sol faible 2 est "meilleure" car

stable : si $u_0 = \begin{cases} 1-\varepsilon & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

on ne satisfait plus la condition de Rankine-Hugoniot

et on peut voir que la solution est proche de v .

Def: On appelle solution entropique de $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (f(u))}{\partial x} = 0 \\ u|_{t=0} = u_0 \end{cases}$

(LAX 1957)

une fonction $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ telle que pour toute fonction $\eta \in C^1(\mathbb{R})$ convexe et toute $\Theta \in C^1(\mathbb{R})$ tq $\Theta' = \eta' f'$, on a l'inégalité

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}) \quad \begin{cases} \varphi \geq 0 \\ \varphi|_{t=0} = 0 \end{cases}, \quad \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \left(\eta(u) \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \Theta(u) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dt + \int_{\mathbb{R}} \eta(u_0) \varphi(0, \cdot) dx \geq 0$$

Rq: • Sol classique $\Rightarrow$ Sol entropique $\Rightarrow$ Sol faible.

En effet: si $u \in C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ est sol classique alors

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \eta(u) \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx dt = - \int_{\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} \eta'(u) \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \varphi dt dx - \int_{\mathbb{R}} \eta(u_0(x)) \varphi(0, x) dx$$

$$\text{et } \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \Theta(u) \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dt = - \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \Theta'(u) \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \varphi dx dt = - \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\eta'(u) f'(u)}_{\frac{\partial}{\partial x} (f(u))} \frac{\partial u}{\partial x} \varphi dx dt$$

d'où le résultat

$$\left(\text{en fait } \frac{\partial}{\partial t} \eta(u) + \frac{\partial}{\partial x} \Theta(u) = \eta'(u) \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (f(u)) \right] \right)$$

• si $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ est solution entropique, on peut considérer

$$\eta: u \mapsto u \text{ convexe et } \Theta = f$$

$$\text{puis } \eta: u \mapsto -u \text{ et } \Theta = -f$$

- si on oublie la condition initiale, l'inégalité dans la déf. précédente se réécrit

$$\frac{\partial}{\partial t} \eta(u) + \frac{\partial}{\partial x} (\theta(u)) \leq 0$$

- η s'appelle une entropie, et θ est le flux d'entropie

Sur les parties régulières on a

$$\frac{\partial}{\partial t} \eta(u) + \frac{\partial}{\partial x} (\theta(u)) = 0$$

et sur les chocs on demande

$$\frac{\partial}{\partial t} \eta(u) + \frac{\partial}{\partial x} (\theta(u)) \leq 0 \text{ ce } \swarrow \text{dissipation d'entropie}$$

L'entropie mesure le désordre, et ne diminue pas. Elle mesure l'irréversibilité de ces processus

qui sélectionne une solution "physique": par exemple dans le cas $u_g < u_d$ et f' strict. croissante, cette condition sélectionne l'onde de rarefaction.

(dans le cas $u_g > u_d$, le choc reste entropique)
(et f' strict. croissante)

Th: Soit $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $f \in C^1(\mathbb{R})$. Alors il existe une
Kruzhkov unique solution entropique $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ au problème

1970

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (f(u)) = 0 \\ u|_{t=0} = u_0 \end{cases}$$

Preuve partielle: Ce théorème est assez difficile.

Voir EVANS p 650..653 et TER ²⁰⁰⁹ encadré par F. BOYER (A la découverte des lois de viscosité...)

On montre donc partiellement l'existence car la méthode est instructive et donne une autre interprétation "physique" de la condition de solution entropique.

- On considère pour $\varepsilon > 0$ petit l'EDP parabolique semi-linéaire

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(f(v)) - \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} v = 0 \\ v|_{t=0} = u_0 \end{cases}$$

On parle de viscosité évanescence par similitude avec les modèles de fluide.

On peut montrer que cette EDP admet une unique

solution $u_\varepsilon \in C^\infty([0, +\infty[\times \mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R}_+, L^\infty(\mathbb{R}))$ et que on a un principe de comparaison qui donne $\forall t, x, |u(t, x)| \leq \|u_0\|_\infty$

- Si on suppose

qu'il existe u tq $u_\varepsilon \rightarrow u$ p.p. à extraction près. Alors

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}), \iint \left(u_\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f(u_\varepsilon) \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \varepsilon u_\varepsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) + \int u_0 \varphi(0, \cdot) = 0$$

pass à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ et donc

u est solution faible

- Pour les conditions entropiques, on se donne $\eta \in C^2(\mathbb{R})$ et $0 \leq \eta' = f' \eta'$ on multiplie l'équation de u_ε par $\eta'(u_\varepsilon)$:

$$\eta'(u_\varepsilon) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + \underbrace{\eta'(u_\varepsilon) f'(u_\varepsilon)}_{\Theta'(u_\varepsilon)} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} = \varepsilon \eta'(u_\varepsilon) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_\varepsilon$$

$$\text{i.e.} \quad \frac{\partial}{\partial t} \eta(u_\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x} \Theta(u_\varepsilon) = \varepsilon \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \eta(u_\varepsilon) - \eta''(u_\varepsilon) \left(\frac{\partial}{\partial x} u_\varepsilon \right)^2 \right]$$

et si η est convexe on réécrit

$$\frac{\partial}{\partial t} \eta(u_\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x} \Theta(u_\varepsilon) \leq \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} \eta(u_\varepsilon).$$

mais comme $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ unif^t bornée et $u_\varepsilon \rightarrow u$ p.p.

alors la fonction faite de la condition précédente passe à la limite:

$\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ $\varphi \geq 0$,

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \eta(u_\varepsilon) \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \Theta(u_\varepsilon) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \int_{\mathbb{R}} \eta(u_0) \varphi(0, \cdot) + \varepsilon \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \eta(u_\varepsilon) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \geq 0$$

d'où bien que $\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \left(\eta(u) \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \Theta(u) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dt + \int_{\mathbb{R}} \eta(u_0) \varphi(0, \cdot) dx \geq 0$
par convergence dominée. □

Conclusion: • Le cadre linéaire est beaucoup plus simple

• Dans le cadre non linéaire, les notions de solutions classiques et de solutions faibles peuvent être inadéquates

(non existence pour l'une, non unicité pour l'autre)

• Ce sont des EDP hyperboliques: il y a propagation à vitesse finie, et apparition de singularités en temps fini dans le cas non linéaire.

- La méthode des caractéristiques permet de calculer assez précisément les solutions (on pourrait détailler mieux que ce qu'on a fait la solution du pde de Riemann)

- A peu près tout ce qu'on a fait s'adapte

au cas
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(f(u)) = 0 & \text{où } u: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \\ u|_{t=0} = u_0 & f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m \end{cases}$$

Pour aller plus loin: $\rightarrow$ remplacer $f(u)$ par $f(x, u)$

(voir notamment les cours du collège de France de PL LIONS
année 2017-2018 sur les lois de conservation scalaires
(dispo sur YOUTUBE))

$\rightarrow$ travailler sur Ω au lieu de $\mathbb{R}^m$ et
mettre des conditions de bord

Pour aller beaucoup plus loin: $\rightarrow$ travailler sur les
systèmes de loi de conservation. (exemple: éq. d'Euler compressible)

Bcp plus difficile et ouvert.

Quelques détails sur la preuve d'existence de solution entropique

• Résolution de
$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u_\varepsilon + \frac{\partial}{\partial x} (f(u_\varepsilon)) - \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_\varepsilon = 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \\ u_\varepsilon|_{t=0} = u_0 \end{cases}$$

→ On note Φ_t le noyau de la chaleur :

la solution de
$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} w - \frac{\partial^2}{\partial x^2} w = g (=g(s,x)) \\ w|_{t=0} = w_0 \end{cases}$$

est
$$w(t,x) = \Phi_t * w_0(x) + \int_0^t \Phi_{t-s} * g(s,\cdot) ds$$

donc pour résoudre
$$\frac{\partial}{\partial t} w - \frac{\partial^2}{\partial x^2} w = -\frac{\partial}{\partial x} (f(w))$$

on applique le th. de point fixe (th sur les fcts contractantes)

à
$$w \mapsto \left\{ (t,x) \mapsto \Phi_t * w_0(x) + \int_0^t \left[-\frac{\partial}{\partial x} \Phi_{t-s} * f(w) \right] ds \right.$$

sur $\{ v \in L^\infty(Q_T), \|v - u_0\|_\infty \leq R \}$ $\left(\left(\frac{\partial}{\partial x} a \right) * b = a * \frac{\partial}{\partial x} b \right)$

ce qui est possible pour T petit.

(utilise f localement lipschitzienne)

→ existence et unicité en temps petit.

↳ qui ne dépend que de R .

→ On montre un principe du maximum :

on a déjà vu (voir plus haut) que si γ est convexe,

et une solution
$$\frac{\partial}{\partial t} \gamma(u) + \frac{\partial}{\partial x} (\Theta(u)) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \gamma(u) = -\gamma''(u) |\nabla u|^2 \leq 0$$

et donc en intégrant en $(t, x) \in [0, t] \times \mathbb{R}$ (ci ça a du sens voir ci-dessous)

$$\int_{\mathbb{R}} [\gamma(u(t)) - \gamma(u_0)] + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x} [\Theta(u) - \frac{\partial}{\partial x} \gamma(u)] \leq 0$$

On choisit (toujours possible) Θ tel que $\Theta(0) = 0$

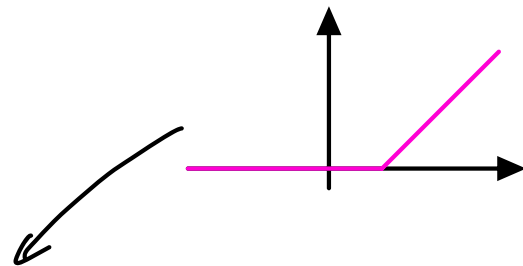
et comme $u \xrightarrow{\pm \infty} 0$ rapidement (propriété des sol de la chaleur)

$$\Theta(u) \xrightarrow{\pm \infty} 0$$

Si on suppose aussi $\gamma'(0) = 0$ alors
$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x} [\Theta(u) - \frac{\partial}{\partial x} \gamma(u)] = 0.$$

et donc $\forall \gamma$ convexe tel que $\gamma'(0) = 0$,

$$\int_{\mathbb{R}} \gamma(u(t)) \leq \int_{\mathbb{R}} \gamma(u_0)$$



On prend par exemple $\gamma(u) = (u - \|u\|_{\infty})_+$, ce qui

$$\left. \begin{array}{l} \text{donne } u \leq \|u_0\|_\infty \\ \text{et de même avec } \gamma(u) = (u + \|u_0\|_\infty)_- \end{array} \right\} |u| \leq \|u_0\|_\infty.$$

et ceci montre l'existence globale en temps (on itère l'existence locale sur un temps qui ne dépend que de R)

• Maintenant on veut de la compacité pour faire $\varepsilon \rightarrow 0$.

Rq La borne uniforme $\|u_\varepsilon\|_\infty \leq \|u_0\|_\infty$ permet d'appliquer le th. de "Banach-Alaoglu séparable" dans $L^\infty \simeq (L^1)'$ qui donne à extraction près la convergence " L^∞ faible*" de $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ vers $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ i.e.

$$\forall \varphi \in L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}), \quad \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} u_\varepsilon \varphi \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} u \varphi$$

Ceci suffit pour passer à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ dans le

terme $\int \int u_\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \varphi$, mais ça ne suffit pas pour

passer le terme $\int \int f(u_\varepsilon) \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ à la limite, car la

convergence faible/faible* se comporte mal avec les

non-linéarités.

On veut appliquer le th. de compacité de Riesz-Kolmogorov qui peut être pensé comme une variante L^p du th. d'Ascoli.

Th (Riesz-Kolmogorov) (voir par ex [BRÉZIS])

Soit $p \in [1, +\infty[$ et $(f_n) \in L^p(\mathbb{R}^n)^N$. On suppose

(i) $\exists M, \forall n, \|f_n\|_p \leq M$

(bornée L^p)

(ii) $\sup_n \|f_n(\cdot + h) - f_n\|_p \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$

(équicontinuité L^p des translations)

(iii) $\forall \varepsilon > 0, \sup_n \int_{|x| > R} |f_n|^p \rightarrow 0$

(équi-tendue L^p)

Alors il existe une extraction σ et $f \in L^p$ tq $f_{\sigma(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^p} f$

S'il suffit de conclure à une convergence L^1_{loc} (ce qui est notre cas car on veut seulement un cvg p.p.) l'hypothèse (iii) peut être omise.

Dans le cas de $\frac{\partial}{\partial t} u_\varepsilon + f'(u_\varepsilon) \frac{\partial}{\partial x} u_\varepsilon - \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_\varepsilon = 0$

on suppose pour simplifier $u_0 \in C^1$ avec $(u_0, \frac{\partial}{\partial x} u_0) \in L^1$

(sinon on peut régulariser u_0 et localiser sur des compacts)

et on montre $\forall \varepsilon, \forall t, \int_{\mathbb{R}} |u^\varepsilon(t, x)| dx \leq \int_{\mathbb{R}} |u_0| dx$

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial}{\partial x} u^\varepsilon \right| \leq \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial}{\partial x} u_0 \right|$$

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial}{\partial t} u^\varepsilon \right| \leq C \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial}{\partial x} u_0 \right|$$

ce qui permet d'appliquer le th. de Kdunozov " $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ " d'où à extraction près, on a bien $u_\varepsilon \rightarrow u$ presque partout ce qui suffit à conclure.

Réf : TER encadré par F. BOYER

Livre de SERRE : system of conservation laws I

DAFERNIS : hyperbolic conservation laws

CHAPITRE 3

Equations Elliptiques

Au chapitre 1, on a abordé l'équation
$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

On a vu :

- un principe du maximum qui implique l'unicité
- un résultat de régularité dans le cas $f = 0$
- un lien avec un problème d'optimisation (principe de Dirichlet) mais sans pouvoir vraiment montrer l'existence d'une solution.

Dans ce paragraphe nous allons :

- étudier existence, régularité, et un cadre qui permet de bien formuler le principe de Dirichlet pour ces équations.
- aborder des opérateurs linéaires plus généraux ou d'autres conditions de bord.
- évoquer des cas non linéaires.

Réf : EVANS - BREZIS - GILBARG-TRUDINGER
(More advanced)

I) Equations elliptiques linéaires

Cadre: on cherche à résoudre pour $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et $\left\{ \begin{array}{l} a_{ij}: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \\ b_i: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \\ c: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \end{array} \right.$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}u = f \quad \text{dans } \Omega \\ u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

$$\text{où } \mathcal{L}u(x) = - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u(x) + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u(x) \\ - \text{Tr}(A(x) D^2 u(x)) + b \cdot \nabla u + cu \quad (\text{forme "développée"})$$

ou

$$\mathcal{L}u(x) = - \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u(x) \\ = - \text{div}(A(x) \nabla u(x)) + b(x) \cdot \nabla u(x) + c(x)u(x) \\ \text{et on dira que } \mathcal{L} \text{ est sous } \underline{\text{forme divergence}}.$$

Rq: sans résoudre que $a_{ij} \in C^1(\Omega) \quad \forall i,j$, on peut passer d'une forme à l'autre mais ça change la valeur de b .

• Dans le cas de la forme développée, on peut supposer (a_{ij})

con

$$\sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{i,j} \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \underbrace{\sum_{i \neq j} \frac{a_{ij} - a_{ji}}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}}_{=0 \text{ en séparant } \begin{smallmatrix} i < j \\ i > j \end{smallmatrix}} \quad \text{symétrique}$$

(strictement/uniformément)

Def: L'opérateur $\mathcal{L}$ est dit elliptique si il existe $\lambda > 0$ t_z
 $\forall \xi \in \mathbb{R}^n, \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \lambda |\xi|^2$
 $\forall x \in \Omega$
 $\underbrace{\quad}_{\xi^T A(x) \xi}$

Req: Cela signifie $\forall x \in \Omega, A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j} \in S_n^{++}(\mathbb{R})$
et $\forall x, \underbrace{\lambda_1(A(x))}_{\text{plus petite valeur propre de } A(x)} \geq \lambda$

Ex: $b \equiv 0, c \equiv 0, a^{ij} = \delta_{ij}$: on retrouve $\mathcal{L} = -\Delta$

Req: On demande aussi, en général

$\forall \xi, \forall x \quad \sum_{i,j} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \Lambda |\xi|^2$ pour un certain $\Lambda < \infty$
mais ceci découle par exemple de l'hypothèse $(a_{ij}) \in L^\infty$
que l'on fera toujours.

Ex: Sur une variété Riemannienne (M, g) , l'opérateur de Laplace-Beltrami
s'écrit $\Delta_g u = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \partial_i [\sqrt{\det g} (g^{ij}) \partial_j u]$ où $g = (g_{ij}(x))$
et (g^{ij}) est son inverse.

I.1) Méthodes d'existence

Même si les EDP elliptiques ont un aspect régularisant, le cadre "classique" où on voudrait des solutions $C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ n'est pas toujours adapté.

Obstacle 1

→ la formulation classique ne s'adapte pas aux domaines irréguliers : par exemple si $\Omega = B(0,1) \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^m$ et $m \geq 2$ il n'y a pas de solution $C^0(\bar{\Omega})$ à

Interprétation :
singularité effaçable.

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial B(0,1) \\ u = 1 & \text{sur } \{0\} \end{cases}$$

(exemple de Zalcman)

$$\partial\Omega = \partial B(0,1) \cup \{0\}$$

Obstacle 2

→ il existe Ω régulier et $f \in C^0(\bar{\Omega})$ tel que la solution de

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad \text{n'est pas } C^2(\bar{\Omega})$$

Par exemple avec $0 \in \Omega$ on peut regarder $v: \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ avec $m \geq 2$ où $\alpha \in]0,1[$.

$$x \mapsto \frac{(x_2^2 - x_1^2)}{|x|^2} |\ln|x||^\alpha$$

Alors $\left\{ \begin{array}{l} \bullet v \text{ se prolonge par continuité en } 0 \text{ et } v \in C^0(\mathbb{R}^n) \setminus C^2(\mathbb{R}^n) \\ \bullet -\Delta v : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \text{ se prolonge par continuité en } 0. \end{array} \right.$

"Règle": les espaces C^h sont rarement bien adaptés pour l'existence et la régularité dans les EDP.

Les bons espaces sont plutôt les espaces de Hölder $C^{h,\alpha}$ où $h \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in]0,1[$ et les espaces de Sobolev $W^{h,p}$ ($\alpha \neq 0,1$)

avec $p \in]1, +\infty[$.
($p \neq 1, +\infty$)

Obstacle 3

$\rightarrow$ si on veut faire le lien avec le principe de Dirichlet

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u = f \text{ sur } \Omega \\ u = \varphi \text{ sur } \partial\Omega \end{array} \right. \stackrel{?}{\Leftrightarrow} u \in \arg\min \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 - \int_{\Omega} f u \right.$$

$u \in C^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$
 $\left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} \text{ } u = \varphi \text{ sur } \partial\Omega$

le cadre $C^1(\Omega) / C^2(\Omega)$ ne convient pas

on a besoin que $\nabla u \in L^2(\Omega)$

Enfin, il est commode de travailler avec des espaces de Hilbert, donc on travaille souvent avec $W^{h,2} = H^h$ quand on peut.

② Solutions "classiques" Sans l'obstacle 1, on peut montrer

Th (méthode de Perron 1923) (voir [G-T-TH 2.14])

Soit Ω un domaine "régulier au sens de Wiener" et $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ (1924)

Alors le problème
$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ sur } \Omega \\ u = \varphi \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$
 admet une unique solution $C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$

et la solution est donnée par $u(x) = \sup \left\{ v(x), \begin{array}{l} v \in C^0(\bar{\Omega}), v \leq \varphi \text{ sur } \partial\Omega \\ v \text{ sous-harmonique} \end{array} \right\}$

Méthode d'existence par principe de comparaison. $-\Delta v \leq 0$

Rq : • si $-\Delta u = 0 \geq -\Delta v$ sur Ω alors $u \geq v$
 $u \geq v$ sur $\partial\Omega$

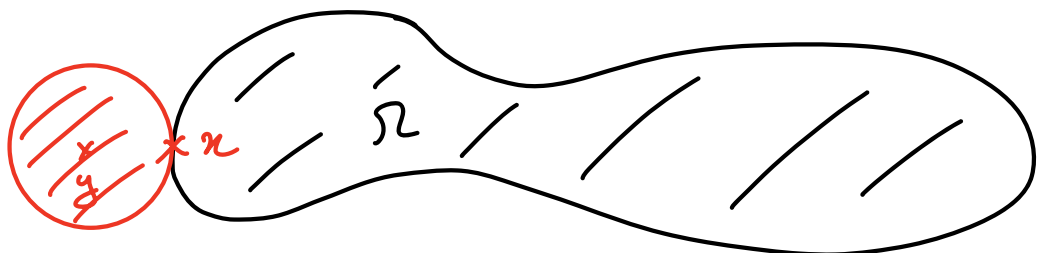
i.e. $u(x) \geq \sup \left\{ v(x), \begin{array}{l} v \leq \varphi \text{ sur } \partial\Omega \\ -\Delta v \leq 0 \end{array} \right\}$

mais en fait il y a égalité.

• dans $\mathbb{R}^2$, si Ω (ouvert borné de $\mathbb{R}^2$) satisfait

$\forall x \in \partial\Omega, \exists \gamma: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ continue tq $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) \neq x$
alors Ω est "régulier au sens de Wiener".

• dans $\mathbb{R}^n$, une condition suffisante est la condition de sphère extérieure: $\forall x \in \partial\Omega, \exists B_R(y)$ tq $\bar{B}_R(y) \cap \bar{\Omega} = \{x\}$.



A propos de l'obstacle 2, on peut montrer

Th (Schauder 1934)

Ω ouvert borné de classe $C^{2,\alpha}$, $f \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$, $\varphi \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$
et $\mathcal{L}$ opérateur elliptique (sous forme développée)

dont les coefficients sont $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ ($\alpha \in]0,1[$)

Alors il existe une unique solution $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f & \text{dans } \Omega \\ u = \varphi & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

[GILBARG-TRUDINGER Th 6.14]

Rq : De plus on a l'estimation

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})} \leq C \left[\|f\|_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})} + \|\varphi\|_{C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})} \right]$$

Steps of the proof:

- On admet le th précédent qui permet de résoudre
$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = \varphi & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$
 si Ω régulier et $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$

- On a vu au chapitre 1 que si Φ est la solution fondamentale du Laplacien, $w := \Phi * f$ est harmonique sur $\mathbb{R}^m$ (et donc C^∞)

On l'a fait pour $f \in C_c^2(\mathbb{R}^m)$, mais on peut voir que si

$f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ alors w est $C^1(\mathbb{R}^m) \cap C^2(\Omega)$ et $-\Delta w = f$ sur Ω

$\hookrightarrow$ (étendue par 0 sur $\mathbb{R}^m \setminus \overline{\Omega}$)

et donc résoudre
$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = \varphi & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (\Leftrightarrow) \quad \begin{cases} \Delta v = 0 & \text{dans } \Omega \\ v = \varphi - w & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$
 $v = u - w$

d'où l'existence d'une unique solution. [GT, Th 4.3]

- On peut montrer la régularité $C^{2,\alpha}$ à l'intérieur de Ω puis sur $\overline{\Omega}$.

- Cas des coefficients constants $L_0 = \sum a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$: on se ramène à Δ .

Par résultat classique d'algèbre (bi)linéaire, il existe une unique $B \in S_m^{++}$ tq $A = B^2$ qu'on peut noter $B = A^{1/2}$

On pose $w(y) = u(By)$: Alors $D^2 w(y) = {}^t B \cdot D^2 u(By) \cdot B$ d'où

$$\text{Tr}(A \cdot D^2 u(x)) = \Delta w(B^{-1}x)$$

- Ensuite on montre des **Estimations a priori**

i.e. on suppose une solution $C^{2,\alpha}$ de $\begin{cases} \mathcal{L}u = f & \text{sur } \Omega \\ u = \varphi & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$

et on montre $\|u\|_{C^{2,\alpha}(B_{\frac{R}{2}})} \leq C \left(\|u\|_{L^\infty(B_R)} + \|f\|_{C^{0,\alpha}(B_R)} \right) + \bar{B}_R C \Omega$

(on utilise que la partie principale $\text{Tr}(a_{ij}(x) D^2 u)$ est localement proche de $\text{Tr}\left(\underbrace{a_{ij}(x_0)}_{\substack{\uparrow \\ \text{centre de } B_{\frac{R}{2}}, B_R}} D^2 u\right)$)

et

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \leq C \left(\|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \|f\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} + \|\varphi\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \right)$$

- On conclut par la méthode de continuité pour lier la résolution de $\begin{cases} \mathcal{L}u = f \\ u = \varphi \end{cases}$ (prenant f, φ) à celle de $\begin{cases} -\Delta u = f \\ u = \varphi \end{cases}$

En effet on a le lemme :

Lemme : X, Y espaces de Banach, $L_0, L_1 \in \mathcal{L}(X, Y)$

$$L_t = (1-t)L_0 + tL_1, t \in [0, 1].$$

On suppose qu'il existe C t. $\forall t \forall x \in X, \|u\|_X \leq C \|L_t x\|_Y$ (*)

Alors $\text{Im } L_0 = Y (\Leftrightarrow) \text{Im } L_1 = Y$.

linéaire
continu

Preuve : Supposons qu'il existe $t_0 \in [0, 1]$ t. $\text{Im } L_{t_0} = Y$.

Ainsi $L_{t_0}^{-1} : X \rightarrow Y$ est bien défini et linéaire continu par (4), et $\|L_{t_0}^{-1}\| \leq C$

Maintenant on fixe $y \in Y$:

$$\begin{aligned} \text{Maintenant } \forall L_t x = y &\Leftrightarrow L_{t_0} x = y + (L_{t_0} - L_t) x \\ &= y + (t - t_0) L_0 x - (t - t_0) L_1 x \end{aligned}$$

indépendant de t_0 .

$$\Leftrightarrow x = \underbrace{L_{t_0}^{-1} y + (t - t_0) L_{t_0}^{-1} [L_0 - L_1] x}_{T^x}$$

et on voit qu'on peut appliquer le th. de point fixe de Banach

si $|t - t_0| < [C(\|L_0\| + \|L_1\|)]^{-1}$ d'où la surjectivité de L_t pour t proche de t_0 et on conclut en découpant $[0, 1]$ en petits intervalles. $\square$

Et donc pour appliquer cela dans notre contexte,

on se ramène au cas $\varphi \equiv 0$ (en introduisant $\mathcal{L}\varphi$) et ensuite

on pose $\mathcal{L}_t = t\mathcal{L}u + (1-t)\Delta u$, $t \in [0, 1]$ (sont tous elliptiques pour le même λ)

qui sont des applications linéaires continues de $\{u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}), u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$

dans $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$. On cherche en fait à montrer que $\mathcal{L}_t$ est bijectif pour $t = 1$ sachant qu'on sait que c'est vrai pour $t = 0$.

Si $\mathcal{L}_t u_t = f$ alors par principe du maximum, $\|u_t\|_\infty \leq \|f\|_\infty$

et par estimation a priori $\|u_t\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \leq C \|f\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)}$

i.e. $\|u\|_X \leq C \|\mathcal{L}_t u\|_Y \quad \forall u, \forall t$. indépendant de t .

$\square$

Conclusion : • cette méthode est technique, mais fonctionne bien si on suppose de la régularité. Elle repose sur le principe du maximum, la représentation intégrale pour le Δ , les estimations a priori.

- On mélange les questions de régularité et d'existence.

⑥ Solutions faibles

"Idée" : Pour montrer des résultats sur l'existence d'objets réguliers, on peut être amené à décomposer l'argument en étapes :

→ il existe un élément a priori peu régulier.

→ on montre ensuite que cet élément est en fait régulier.

↓
voir paragraphe suivant.

Heuristique : on suppose $\mathcal{L}$ sous forme divergence :

$$\text{si } -\mathcal{L}u = f \text{ alors } \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \int_{\Omega} (-\mathcal{L}u) \varphi = \int_{\Omega} f \varphi$$

$$\begin{aligned} \text{et } \int_{\Omega} (-\mathcal{L}u) \varphi &= \int_{\Omega} -\operatorname{div}(A \nabla u) \cdot \varphi + (b \cdot \nabla u) \cdot \varphi + c \varphi \\ &= \int_{\Omega} (A \nabla u) \cdot \nabla \varphi + (b \cdot \nabla u) \varphi + c \varphi \quad \text{car } \varphi = 0 \text{ pris de } \partial\Omega \end{aligned}$$

(on n'a pas besoin de régularité pour Ω car φ est nul sur un voisinage de $\partial\Omega$)

Déf : Solution faible.

$$\left| \begin{array}{l} \text{On dit que } u \text{ est une solution faible de } \begin{cases} \mathcal{L}u = f \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \\ \text{si } \left\{ \begin{array}{l} u \in H_0^1(\Omega) \text{ et} \\ \forall \varphi \in \underbrace{H_0^1(\Omega)}, \int_{\Omega} A \nabla u \cdot \nabla \varphi + (b \cdot \nabla u) \varphi + c \varphi = \int_{\Omega} f \varphi \end{array} \right. \end{array} \right.$$

On peut mettre $C_c^\infty(\Omega)$ (dans l'esprit des distributions)
ou $H_0^1(\Omega)$ (dans l'esprit de Lax-Milgram)
cf plus loin.

Interlude 1 sur les Espaces de Sobolev.

Déf 1: $s \in \mathbb{R}_+$, $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$

$$\left| \begin{array}{l} H^s(\mathbb{T}) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{T}), \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^{2s} |\hat{u}(n)|^2 < +\infty \right\} \\ \text{muni de } \|u\|_{H^s(\mathbb{T})} = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} (1 + |n|^{2s}) |\hat{u}(n)|^2 \right)^{1/2} \end{array} \right|$$

Convenient for computations

Restricted to $\mathbb{T}$ or $\mathbb{T}^m \rightsquigarrow$ compact and no boundary conditions

Déf 2: $s \in \mathbb{R}_+$, $\Omega = \mathbb{R}^m$.

$$\left| \begin{array}{l} H^s(\mathbb{R}^m) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^m), \int_{\mathbb{R}^m} |\xi|^{2s} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi < \infty \right\} \\ \text{muni de } \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^m)} = \left(\int_{\mathbb{R}^m} (1 + |\xi|^{2s}) |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \end{array} \right|$$

Pratique si on travaille sur $\mathbb{R}^m$.

On peut définir $H^s(\Omega) = \{ u|_{\Omega}, u \in H^s(\mathbb{R}^m) \}$ mais il faut

alors définir $\|u\|_{H^s(\Omega)} = \inf \{ \|v\|_{H^s(\mathbb{R}^m)}, v = u \text{ sur } \Omega \}$

ce qui n'est pas toujours pratique.

Ces définitions se généralisent difficilement au cas $p \neq 2$, mais c'est possible (décomposition de Littlewood-Paley).

Def 3: $h \in \mathbb{N}$, Ω ouvert de $\mathbb{R}^m$:

$$H^h(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^m \text{ s.t. } |\alpha| \leq h, \underbrace{\partial^\alpha u}_{\text{au sens des distributions}} \in L^2(\Omega) \right\}$$

munie de la norme

$$\|u\|_{H^h(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq h} \|\partial^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}$$

Ex: si $h=1$,

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega), \exists (g_i)_{i \in [1, m]} \in L^2(\Omega)^m \text{ s.t.} \right.$$

$$\left. \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \forall i, \int_{\Omega} u \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi = - \int_{\Omega} g_i \varphi \right\}$$

$$\text{et alors } \|u\|_{H^1} = \left(\|u\|_2^2 + \sum_{i=1}^m \|g_i\|_2^2 \right)^{1/2}$$

→ Mieux adapté à travailler sur $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

→ Mieux adapté aux généralisations L^p :

$$W^{h,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega), \forall |\alpha| \leq h, \partial^\alpha u \in L^p(\Omega) \right\}$$

$$\text{munie de } \|u\|_{W^{h,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq h} \|\partial^\alpha u\|_p \text{ (ou } \left(\sum_{|\alpha| \leq h} \|\partial^\alpha u\|_p^p \right)^{1/p}$$

mais c'est équivalent

→ plus pratique pour étendre à S non entier $\rightarrow$ Interpolation.

- Les espaces $H^s(\mathbb{T})$, $H^s(\mathbb{R}^m)$, $H^h(\Omega)$ sont des espaces de Hilbert et $L^2 = H^0 \subset H^{s_1} \subset H^{s_2} \subset \bigcap_{s \in \mathbb{N}} H^s = \begin{cases} C^\infty & \text{si } \Omega = \mathbb{T} \\ \mathcal{S}(\mathbb{R}^m) & \text{si } \Omega = \mathbb{R}^m \\ C^\infty(\bar{\Omega}) & \text{si } \Omega \text{ borné régulier} \end{cases}$
- si $\Omega = \mathbb{R}^m$ et $h = s \in \mathbb{N}$, les deux définitions de H^s/H^h coïncident.
- Les espaces $W^{h,p}(\Omega)$ sont des espaces de Banach.

Etude de $W^{1,p}(\Omega)$ pour $\Omega = I$ intervalle de $\mathbb{R}$

C'est beaucoup plus simple car

→ on peut voir que $u \in W^{1,p}(I)$ est primitive de u' au sens $\forall x_0 \in I, \exists \alpha \in \mathbb{R}, u(x) = \alpha + \int_{x_0}^x u'(t) dt$ p.p. x .

et en particulier u a un représentant continu sur $\bar{I}$
donc on peut écrire $W^{1,p}(I) \subset C^0(\bar{I})$ et cette injection est même continue si I borné, au sens $\|u\|_\infty \leq C \|u\|_{W^{1,p}}$
(l'injection est en fait compacte, voir le th. de Rellick plus loin)

→ On peut justifier la formule d'intégration par parties

$$\int_a^b u'v = - \int_a^b u v' + u(b)v(b) - u(a)v(a).$$

→ On peut donner deux définitions équivalentes de

$$W^{1,p}_0(I): W^{1,p}_0(I) = \overline{C^\infty_c(I)}^{\|\cdot\|_{W^{1,p}}} = \left\{ u \in W^{1,p}(I), u(a) = u(b) = 0 \right\}$$

Ref: BREZIS § 8 on peut analyser Fonctionnelle. $I =]a, b[$ bornée
Sur ma page web.

mais si on peut remplacer par $\lim_{\pm\infty} u = 0$.

Etude (Rapide) de $W^{1,p}(\Omega)$ pour $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (BREZIS § 9, EVANS)

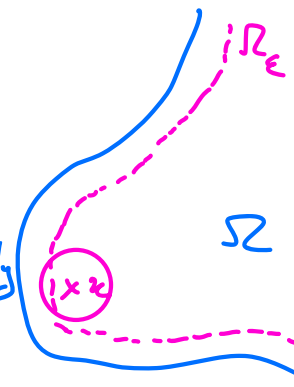
- Th (régularisation): on suppose Ω bornée, $p \in [1, +\infty[$, $u \in W^{1,p}(\Omega)$
Alors il existe $u_n \in W^{1,p}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ t.q. $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{W^{1,p}} u$

Sketch of proof: • (η_ε) famille régularisante:

$u_\varepsilon := \eta_\varepsilon * u$ est C^∞ sur $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega, d(x, \Omega^c) > \varepsilon\}$

avec $\nabla u_\varepsilon = \eta_\varepsilon * \nabla u$ (sur Ω_ε) car

$$\forall x \in \Omega_\varepsilon \quad \frac{\partial}{\partial x_i} u(x) = \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \eta_\varepsilon \right) * u(x)}_{(\eta_\varepsilon \text{ est } C^1)} = \int \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \eta_\varepsilon(x-y)}_{[y \mapsto \eta_\varepsilon(x-y)] \in C_c^\infty(\Omega)} u(y) dy = + \int \eta_\varepsilon(x-y) \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x_i}(y)}_{\text{par déf de la dérivée faible}} dy$$



et donc $u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{} u$ dans $W^{1,p}_{loc}(\Omega)$.

- Ensuite on écrit $\Omega = \bigcup_{i \geq 1} \Omega_i$ où $\Omega_i = \{x, d(x, \Omega^c) > \frac{1}{i}\}$
et $V_i = \Omega_{i+3} \cup \overline{\Omega_{i+1}}$, $V_0 \subset\subset \Omega$ de sorte que $\Omega = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} V_i$

Ainsi chaque $x \in \Omega$ est dans un mb fini de V_i

(ξ_i) partition de l'unité associée aux $(V_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ($\text{supp } \xi_i \subset V_i, 0 \leq \xi_i \leq 1, \sum_{i \in \mathbb{N}} \xi_i = 1$)

et on pose $v = \sum_{i \in \mathbb{N}} \underbrace{\eta_{\varepsilon_i} * (\zeta_i u)}_{\substack{\text{t.q. } \|\eta_{\varepsilon_i} * (\zeta_i u) - \zeta_i u\|_{W^{1,p}} \leq \frac{\varepsilon}{2^i}}}$ de sorte que $\|v - \underbrace{u}_{\sum_i \zeta_i u}\|_{W^{1,p}} \leq \varepsilon$.

et $v \in C^\infty(\Omega)$ car $\forall i$ supp $\eta_{\varepsilon_i} * (\zeta_i u) \subset \Omega_{i+h} \cap \overline{\Omega}_i$ donc il y a fs un nb fini de termes dans la somme. $\square$

• Rq : si Ω est borné et C^1 alors $C^\infty(\overline{\Omega})$ est dense dans $W^{1,p}(\Omega)$ ($p < \infty$)

• Dérivée d'un produit : a-t-on

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(uv) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)v + u\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right) \quad ?$$

Approche 1 : si $u \in W^{1,p}(\Omega)$ et $v \in C_c^1(\Omega)$ ok

$$\begin{aligned} \text{car } \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \int_{\Omega} uv \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} &= \int_{\Omega} u \left[\frac{\partial}{\partial x_i} (\underbrace{\varphi v}_{\in C_c^1}) - \varphi \frac{\partial v}{\partial x_i} \right] \\ &= - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) (\varphi v) - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} \varphi = - \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) v + u \frac{\partial v}{\partial x_i} \right] \varphi \end{aligned}$$

Approche 2 : si $(u, v) \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ ok par densité :

On applique le résultat de densité ci-dessus, donc il existe $(u_n, v_n) \in$

$C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ t.q. $u_n, v_n \xrightarrow{W^{1,p}} u, v$ et on obtient par la preuve qu'on a aussi $\|u_n\|_\infty \leq \|u\|_\infty, \|v_n\|_\infty \leq \|v\|_\infty$.

$$\text{On a bien sûr } \forall n, \frac{\partial}{\partial x_i}(u_n v_n) = \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right)v_n + u_n \left(\frac{\partial v_n}{\partial x_i}\right)$$

et on passe à la limite dans la formulation au sens des distributions

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \int_{\Omega} u_n v_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right)v_n + u_n \frac{\partial v_n}{\partial x_i} \right] \varphi \quad \square$$

Attention, en général on n'a pas $W^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$ (ni $C^0(\bar{\Omega})$)
 sauf si $n=1$ (facile car $u(x) = \int_0^x u'(t) dt + \alpha$) ou p grand et Ω tend,
 (ex: $x \mapsto \ln|x| \in H^1(L^\infty; \mathbb{R}^n; 3)$)

• Dérivée d'une courbe: $G \in C^1(\mathbb{R})$ avec $G(0)=0, |G'| \leq M$

et $p \in [1, \infty]$: Alors $u \in W^{1,p}(\Omega) \Rightarrow G \circ u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$\text{et } \frac{\partial}{\partial x_i}(G \circ u) = (G' \circ u) \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

Preuve On a bien $G \circ u \in L^p(\Omega)$

$$\text{et } (G' \circ u) \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega)$$

et pour $p < \infty$ on procède à nouveau par densité pour montrer

et pour $p = \infty$, on se place sur $\Omega' \subset \subset \Omega$ et on applique le cas précédent $\square$
 ↑ compact de sorte que $L^\infty(\Omega') \subset L^p(\Omega')$

Def: Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$. On définit $H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$
 comme l'adhérence de $C_c^\infty(\Omega)$ pour la norme
 H^1 .

Rq: • Intuitivement, $H_0^1(\Omega)$ est vu comme le sous-ensemble
 des fonctions de $H^1(\Omega)$ qui sont nulles sur $\partial\Omega$.

Mais cette vision requiert de la régularité sur Ω

• n'est pas simple à mettre en place car

si $n \geq 2$, $H^1(\Omega) \not\subset C^0(\bar{\Omega})$ donc on ne peut pas

a priori parler de $u|_{\partial\Omega}$

→ voir Th plus loin

si $m=1$ et par exemple $\Omega =]a, b[$ intervalle borné,
 c'est beaucoup plus simple car $H^1(]a, b[) \subset C^0([a, b])$
 et on peut montrer $H^1_0(]a, b[) = \{u \in H^1(]a, b[) \mid u(a) = u(b) = 0\}$.

• On peut montrer $H^1_0(\mathbb{R}^n) = H^1(\mathbb{R}^n)$.

• $(H^1_0(\Omega), \|\cdot\|_{H^1})$ est un espace de Hilbert ($H^1_0(\Omega)$ fermé par définition)

et comme $H^1_0(\Omega)$ ne contient pas de constante à part la fonction nulle

on peut définir $\|u\|_{H^1_0(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$

Lemme (Inégalité de Poincaré)

si Ω est borné dans au moins une direction, alors il existe

$$C = C(\Omega) \text{ tq } \forall u \in H^1_0(\Omega), \quad \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

Ainsi les normes $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ et $\|\cdot\|_{H^1_0(\Omega)}$ sont équivalentes.

Preuve: Supposons $\Omega \subset [-a, a] \times \mathbb{R}^{n-1}$ et $u \in C_c^\infty(\Omega)$.

$$\text{Alors } u^2(x_1, x') = \int_{-\infty}^{x_1} 2u(t, x') \frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x') dt$$

$$\leq 2 \left(\int_{-\infty}^{x_1 + \infty} u^2(t, x') dt \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{x_1 + \infty} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2(t, x') dt \right)^{1/2}$$

Ensuite on intègre en x_1

$$\int_{\mathbb{R}} u^2(x_1, x') dx_1 = \int_{-a}^a u^2(x_1, x') dx_1 \leq 4a \left(\int_{\mathbb{R}} u^2(x_1, x') dx_1 \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2(x_1, x') dx_1 \right)^{1/2}$$

$$\text{i.e. } \int_{\mathbb{R}} u^2(x_1, x') dx_1 \leq (4a)^2 \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2(x_1, x') dx_1$$

et enfin on intègre en x' :

$$\int_{\Omega} u^2(x) dx \leq (4a)^2 \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 dx \leq (4a)^2 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \quad \square$$

Rq: C'est faux (en général) pour des domaines non bornés.

Par exemple sur $\mathbb{R}^m$, on n'a pas $\|u\|_{L^2} \leq C \|\nabla u\|_{L^2}$ sur $H_0^1(\mathbb{R}^m)$

En effet pour $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$ on regarde $\varphi_2(x) = \varphi\left(\frac{x}{2}\right)$

$$\|\varphi_2\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi^2\left(\frac{x}{2}\right) dx = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi^2(y) 2^m dy = 2^m \|\varphi\|_{L^2}^2$$

$$\text{et } \|\nabla \varphi_2\|_{L^2}^2 = \int \frac{1}{2^2} |\nabla \varphi\left(\frac{x}{2}\right)|^2 dx = 2^{m-2} \|\nabla \varphi\|_{L^2}^2$$

$$\frac{\|\varphi_2\|_{L^2}}{\|\nabla \varphi_2\|_{L^2}} \xrightarrow{2 \rightarrow \infty} +\infty \quad \text{donc on ne peut pas avoir } \|u\|_{L^2} \leq C \|\nabla u\|_{L^2}$$

Th (justification rigoureuse de H_0^1) $1 \leq p < \infty$

On suppose Ω de classe C^1 . Soit $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$

Alors $u = 0$ sur $\partial\Omega \Leftrightarrow u \in W_0^{1,p}(\Omega)$

Rq : le sens $\Rightarrow$ ne demande pas de régularité sur Ω

Preuve : $\Rightarrow$ Lemme : $1 \leq p < \infty$: $u \in W^{1,p}(\Omega)$ avec $\text{supp } u$ compact
 $\Rightarrow u \in W_0^{1,p}(\Omega)$

en effet il existe ω ouvert $\hookrightarrow \text{supp } u \subset \omega \subset \Omega$

et $\chi \in C_c^\infty(\omega) \hookrightarrow \chi = 1$ sur $\text{supp } u$

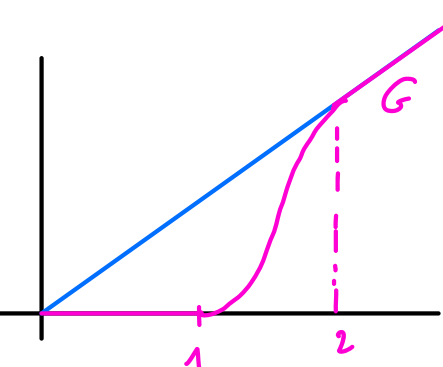
mais par densité il existe $u_n \in C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow$

$u_n \xrightarrow{W^{1,p}} u$ mais alors $\chi u_n \in C_c^\infty(\Omega)$

et $\chi u_n \xrightarrow{W^{1,p}} u$ d'où $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \square$

On commence en supposant $\text{supp } u$ borné.

On considère $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \hookrightarrow \begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}, |G(t)| \leq |t| \\ \text{de classe } C^1 \\ \forall t \in [-1,1], G(t) = 0 \\ \forall |t| \geq 2, G(t) = t \end{cases}$



et on pose $u_n = \frac{G(mu)}{n}$

Alors $u_m \in W^{1,p}(\Omega)$ par composition dans les Sobolev (cf + haut)

et $u_m \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{W^{1,p}} u$ (si $u(x) = 0$, $u_m(x) = 0$ & $|u_m| \leq |u|$
 si $u(x) \neq 0$, $u_m(x) = u(x)$ pour m grand donc cvg L^p)

De plus,

et $\frac{\partial u_m}{\partial x_i} = \underbrace{G'(mu)}_{\text{borné}} \frac{\partial u}{\partial x_i}$ donc cvg $W^{1,p}$

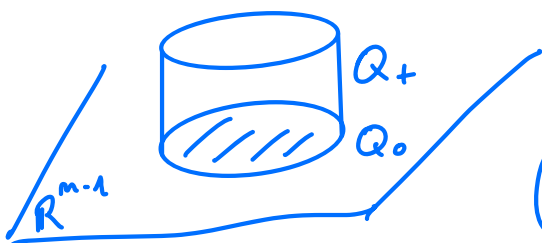
$\text{supp } u_m \subset \{x \in \Omega, |u(x)| \geq \frac{1}{m}\}$ borné
 car $u = 0$ sur $\partial\Omega$ et u est continue.
 est compact dans Ω , ceci implique $u_m \in W^{1,p}_0$ par le lemme.

Si on ne suppose plus $\text{supp } u$ borné, on regarde $\chi_m u$

où $\chi_m = 1$ sur $B(0, m)$ et $\chi_m = 0$ sur $B(0, m+1)^c$

et par ce qui précède, $\chi_m u \in W^{1,p}_0$ mais on a $\chi_m u \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{W^{1,p}} u$.

⊆ "Sketch" par corte locale, on est ramené à :



$u \in W^{1,p}_0(Q_+) \cap C^0(Q_+) \Rightarrow u = 0$ sur Q_0

$(Q_+ = B_{\mathbb{R}^{n-1}}(0,1) \times]0,1[, Q_0 = B_{\mathbb{R}^{n-1}}(0,1) \times \{0\})$

Par définition il existe $u_m \in C_c^\infty(Q_+)$ $\chi_m u_m \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{W^{1,p}} u$

et on écrit $\frac{1}{\varepsilon} \int_{|x'| < 1} \int_0^\varepsilon |u_m(x', x_N)| dx_N dx' \leq \int_{|x'| < 1} \int_0^\varepsilon \left| \frac{\partial u_m}{\partial x_N}(x', t) \right| dt dx'$

qui passe à la limite $m \rightarrow \infty$, et donc avec $\varepsilon \rightarrow 0$ on réécrit

$\int_{|x'| < 1} |u(x', x_N)| dx' = 0$ (utilise $\frac{\partial u}{\partial x_N} \in L^1$ et $u \in C^0$) $\square$

FIN INTERLUDE 1

Comme d'habitude on se pose quelques questions préliminaires pour "légitimer" notre notion de solution faible.

Prop: On suppose $(a_{ij}) \in C^1(\bar{\Omega})$, $b_i, c, f \in C^0(\bar{\Omega})$
• soit u solution $C^2(\bar{\Omega})$ de $\begin{cases} \mathcal{L}u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$

Alors u est solution faible.

(Attention : $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ ne suffit pas car $\nabla u \notin L^2(\Omega)$)

• On suppose Ω de classe C^1 . soit u solution faible qui est $C^2(\bar{\Omega})$. Alors u est solution classique.

Preuve: $\rightarrow$ soit u solution "classique" $C^2(\bar{\Omega})$.

Alors d'après le th ci-dessus, $u \in H_0^1(\Omega)$, et $\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$,

$$\int (A \nabla u) \cdot \nabla \varphi + b \nabla u \cdot \varphi + c \varphi = \int_{\Omega} (\mathcal{L}u) \varphi = \int_{\Omega} f \varphi$$

par IPP et $\varphi = 0$ sur $\partial\Omega$

On conclut par densité de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ et la continuité en $\varphi \in H_0^1$

$\rightarrow$ Réciproquement, si $u \in C^2(\bar{\Omega})$ est solution faible, alors à nouveau par le th. précédent (et régularité de Ω), $u \in H_0^1(\Omega)$. De plus

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \int (\mathcal{L}u) \varphi = \int A \nabla u \cdot \nabla \varphi + b \nabla u \cdot \varphi + c \varphi = \int f \varphi$$

donc $\mathcal{L}u = f$ pp sur Ω et donc partout par continuité. $\square$

On peut désormais énoncer le résultat d'existence (et unicéité) de solution faible :

Th Soit Ω un ouvert borné non vide de $\mathbb{R}^n$,
 $(a_{ij}) \in L^\infty$, $b = 0$ et $c \geq 0$
et $\mathcal{L} = -\operatorname{div}(A \nabla \cdot) + c$ elliptique.

Alors pour tout $f \in L^2(\Omega)$ il existe une unique solution faible $u \in H_0^1(\Omega)$ pour
$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

$$\text{et } \|u\|_{H^1} \leq C \|f\|_2$$

pour $C \in \mathbb{R}_+$.

De plus, si $a_{ij} = a_{ji} \ \forall i, j$, u est l'unique

solution de
$$\min \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} (A \nabla u \cdot \nabla u + cu^2) - \int_{\Omega} f u, u \in H_0^1(\Omega) \right\}$$

Rq : • Cela justifie le principe de Dirichlet évoqué au chapitre 1.

• On n'a pas fait d'hypothèse de régularité sur Ω

Proof of the theorem

we define $B[u, v] = \int_{\Omega} A \nabla u \cdot \nabla v + b \nabla u \cdot v + c v$

$$L(v) = \int_{\Omega} f v. \quad \forall (u, v) \in H_0^1(\Omega)$$

and apply Lax-Milgram Theorem sur l'espace de Hilbert $H_0^1(\Omega)$

- B and L are well defined and continuous in $H_0^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned} \int |A \nabla u \cdot \nabla v| &\leq \underbrace{\sup_{x \in \Omega} \|A(x)\|_{M_n(\mathbb{R})}}_{\leq \left(\sum_{i,j} \|a_{ij}\|_{\infty}^2 \right)^{1/2}} \|\nabla u\|_2 \|\nabla v\|_2 \\ &\quad \left. \begin{aligned} &\text{con } |\xi_j| = 1, \\ &|A(x) \xi|^2 = \sum_i \left| \sum_j a_{ij} \xi_j \right|^2 \\ &\leq \left(\sum_{i,j} |a_{ij}|^2 \right) \sum_j |\xi_j|^2 \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

$$\int |c v| \leq \|c\|_2 \|v\|_2 \quad \text{et} \quad \int |f v| \leq \|f\|_2 \|v\|_2.$$

- B is coercive sur $H_0^1(\Omega)$

$$B[u, u] = \int A(x) \nabla u \cdot \nabla u + c u^2 \geq \lambda \|\nabla u\|_2^2$$

mais par l'inégalité de Poincaré la norme $\|\cdot\|_{H^1}$ est équivalente à $u \mapsto \|\nabla u\|_2$

□

Autres conditions de bord

Ex 1: On peut exhiber et résoudre une formulation faible de $\begin{cases} \mathcal{L}u = f & \text{dans } \Omega \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$

(Dirichlet non homogène) si on suppose $g \in H^1(\Omega)$.

On peut en effet définir une solution faible de la même façon que pour le cas homogène, mais en remplaçant $u \in H_0^1(\Omega)$ par $u \in g + H_0^1(\Omega)$.

et il y a à nouveau une unique solution si $b=0$:
 $c \geq 0$

En effet on observe que $\forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} \int A \nabla u \cdot \nabla \varphi + \int c u \varphi &= \int A \nabla (u-g) \cdot \nabla \varphi + \int c (u-g) \varphi \\ &+ \int A \nabla g \cdot \nabla \varphi + \int c g \varphi. \end{aligned}$$

donc on doit résoudre

$$B[\underbrace{u-g}_w, \varphi] = \int f \varphi - B(g, \varphi) \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

et on peut à nouveau appliquer Lax-Hilgram dans H_0^1 .

Ceci est une variante "faible" de $\begin{cases} \mathcal{L}u = f \\ u = g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{L}(u-g) = f - \mathcal{L}g \\ u-g = 0 \end{cases}$

Ex 2: Condition de Neumann homogène

On veut résoudre au sens faible
$$\begin{cases} -\Delta u + cu = f & \text{dans } \Omega \\ \partial_n u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

 $c \in L^\infty(\Omega), f \in L^2(\Omega)$

Déf: On appelle solution faible du problème de Neumann

une fonction $u \in H^1(\Omega)$ qui vérifie

$$\forall \varphi \in H^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi + \int_{\Omega} c u \varphi = \int_{\Omega} f \varphi$$

Re: on ne "voit" pas la condition de bord: elle est "cachée" dans le fait qu'on peut prendre $\varphi \in H^1(\Omega)$ au lieu de $H_0^1(\Omega)$

Prop: On suppose $(c, f) \in C^0(\bar{\Omega})$, et Ω de classe C^1 .

• si $u \in C^2(\bar{\Omega})$ est solution classique de
$$\begin{cases} -\Delta u + cu = f \\ \partial_n u = 0 \end{cases}$$
 alors u est solution faible.

• si u est sol. faible du pb de Neumann avec $u \in C^2(\bar{\Omega})$ alors u est solution forte.

Preuve : • Pour $\varphi \in C^1(\overline{\Omega})$,

$$(-\Delta u + cu)\varphi = f\varphi \text{ donc}$$

$$\underbrace{\int_{\Omega} (-\Delta u)\varphi + \int_{\Omega} cu\varphi = \int_{\Omega} f\varphi}$$

$$= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi - \cancel{\int_{\Omega} (\partial_n u)\varphi}$$

et on conclut par densité de $C^1(\overline{\Omega})$ dans $H^1(\Omega)$.

• Réciproquement, si u est sol faible alors par le même calcul,

$$\int_{\Omega} (-\Delta u + cu)\varphi + \int_{\partial\Omega} (\partial_n u)\varphi = \int_{\Omega} f\varphi \quad \forall \varphi \in C^1(\overline{\Omega})$$

Avec $\varphi \in C_c^1(\Omega)$ on en déduit $-\Delta u + cu = f$ dans Ω

d'où $\forall \varphi \in C^1(\overline{\Omega})$, $\int_{\partial\Omega} (\partial_n u)\varphi = 0$ d'où $\partial_n u = 0$ sur $\partial\Omega$

(prendre φ extension C^1 de $\partial_n u$) $\square$

Th: On suppose $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, borné. Pour tout $f \in L^2(\Omega)$
 et $c \in L^2(\Omega)$ $\hookrightarrow c \geq \alpha > 0$ p.p. sur Ω pour un
 certain $\alpha \in]0, +\infty[$,
 il existe une unique solution faible au pb de Neumann

$$\begin{cases} -\Delta u + cu = f & \text{dans } \Omega \\ \partial_n u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

De plus u est l'unique solution de

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \int (\|\nabla u\|^2 + cu^2) - \int f u, u \in H^1(\Omega) \right\}$$

Preuve: On veut résoudre $B(u, \varphi) = L(\varphi)$
 $\forall \varphi \in H^1(\Omega), \int \nabla u \cdot \nabla \varphi + cu\varphi = \int f\varphi$

On peut appliquer le th. de Lax-Milgram car

$$B(u, u) = \int \|\nabla u\|^2 + cu^2 \geq \min\{1, \alpha\} \|u\|_{H^1}^2 \quad \square$$

Rq: Attention, si $c \equiv 0$, il se peut qu'il n'y ait pas de
 solution: en fait s'il existe $u \in C^2(\bar{\Omega})$ $\hookrightarrow \begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ \partial_n u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$
 Alors nécessairement $\int_{\Omega} f = 0$: en effet

$$\int_{\Omega} f = \int_{\Omega} (-\Delta u) \cdot 1 = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla 1 - \int_{\partial\Omega} (\partial_n u) \cdot 1 = 0.$$

© Structure de l'ensemble des solutions

Interlude Rappels d'analyse fonctionnelle:

Alternative de Fredholm: E un Banach et $T: E \rightarrow E$ compact.

On s'intéresse à l'équation $x - T(x) = f$ (f donnée
 x inconnue)

Alors $\rightarrow$ soit $\forall f \in E$, l'équation admet une unique solution

$\rightarrow$ soit il existe $m \in \mathbb{N}^*$ $\hookrightarrow$ l'équation $x - T(x) = 0$
admet m solutions indépendantes ($\text{Ker}(\text{Id} - T)$)

et l'équation $x - T(x) = f$ admet une solution

ssi f satisfait m conditions d'orthogonalité

$$(\text{Im}(\text{Id} - T) = \text{Ker}(\text{Id} - T^*)^\perp)$$

Soit

Corollaire $\mathcal{L}u = -\text{div}(A(x)\nabla u) + b \cdot \nabla u + c u$ elliptique

$\rightarrow$ soit le pb $\begin{cases} \mathcal{L}u = 0 \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$ n'admet que la solution (faible)
triviale $u = 0$

et alors pour tout $g \in H^1(\Omega)$ et tout $f \in L^2(\Omega)$, il existe

une unique solution faible de $\begin{cases} \mathcal{L}u = f \text{ dans } \Omega \\ u = g \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$

$\rightarrow$ soit le pb $\begin{cases} \mathcal{L}u = 0 \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$ est résolu par un e.v.
de dimension finie.

Pg: dans le second cas, le pb $\begin{cases} \mathcal{L}u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$

a une solution faible ssi $f \in F^1$ pour un certain espace F

Preuve: • On remarque que

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f & \text{dans } \Omega \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad \text{se ramène à} \quad \begin{cases} \mathcal{L}v = f - \mathcal{L}g & \text{dans } \Omega \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

au sens

$$\begin{cases} B(u, \varphi) = L(\varphi) \quad \forall \varphi \in H_0^1 \\ u \in g + H_0^1(\Omega) \end{cases} \quad (\Leftrightarrow) \quad \begin{cases} B(u-g, \varphi) = B(g, \varphi) + L(\varphi) \\ u-g \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

donc on peut supposer $g \equiv 0$.

• Maintenant, on observe que $u \in H_0^1(\Omega)$ est solution faible

$$\text{de } \begin{cases} \mathcal{L}u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad \text{ssi} \quad \begin{cases} \mathcal{L}u + \gamma u = f + \gamma u & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

$$\text{i.e. } \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \quad B(u, \varphi) + \gamma \int u \varphi = \int f \varphi + \gamma \int u \varphi$$

mais pour γ assez grand, $(u, \varphi) \mapsto B(u, \varphi) + \gamma \int u \varphi$

est coercive car

$$\begin{aligned}
 B(u, u) &\geq \lambda \int |\nabla u|^2 - \sum_{i=1}^n \|b_i\|_\infty \underbrace{\int |\nabla u| \cdot |u|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2} \int |\nabla u|^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \int u^2} - \|c\|_\infty \int u^2 \\
 &\geq \underbrace{\left(\lambda - \varepsilon \sum \|b_i\|_\infty \right)}_{\geq \frac{\lambda}{2} \text{ pour } \varepsilon \text{ petit}} \int |\nabla u|^2 - \underbrace{\left(\|c\|_\infty + \frac{\sum \|b_i\|_\infty}{2\varepsilon} \right)}_{\text{compensé par } \delta} \int u^2
 \end{aligned}$$

$ab \leq \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2$

donc par Lax-Milgram, on peut définir

$$\mathcal{L}_\gamma^{-1} : f \in L^2(\Omega) \mapsto u \in H_0^1(\Omega) \text{ l'unique sol faible de } \begin{cases} \mathcal{L}u + \gamma u = f \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

et l'équation $\mathcal{L}u = f$ se réécrit

$$\mathcal{L}_\gamma u = f + \gamma u$$

$$\text{i.e. } u = \mathcal{L}_\gamma^{-1} [f + \gamma u].$$

$$\text{ou encore } u - \gamma \mathcal{L}_\gamma^{-1} u = \mathcal{L}_\gamma^{-1} f.$$

Mais par le th. de Rellich (voir ci-dessous) l'opérateur

$$\mathcal{L}_\gamma^{-1} : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega) \text{ est compact, et donc le th.}$$

sur l'alternative de Fredholm s'applique. □

Interlude 2 sur les espaces de Sobolev

Th de Rellich-Kondrachov

- si Ω est borné, alors l'inclusion

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \text{ est compacte.}$$

notation $\hookrightarrow$
pour une inj.
compacte

- si Ω est borné et de classe C^1 , alors l'inclusion

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \text{ est compacte}$$

99s éléments de preuve :

- On commence par le cas $n=1$: $\forall p \in]1, \infty]$, $W^{1,p}(I) \hookrightarrow C^0(\bar{I})$
(I intervalle borné)

$$\forall p \in]1, \infty[\quad |u(x)| \leq |u(y)| + \left| \int_x^y |u'(t)| dt \right| \leq |u(y)| + |I|^{1/p'} \left(\int_I |u'|^p \right)^{1/p}$$

(le cas $p=\infty$ est facile)

$$\text{d'où } |u(x)|^p \leq 2^{p-1} (|u(y)|^p + |I|^{p/p'} \|u'\|_p^p)$$

$$\text{et en intégrant en } y : |u(x)|^p \cdot |I| \leq 2^{p-1} \left(\|u\|_p^p + |I|^{1+\frac{p}{p'}} \|u'\|_p^p \right)$$

$$\text{De plus } |u(x) - u(y)| \leq \left| \int_x^y |u'(t)| dt \right| \leq |x-y|^{1/p'} \left(\int_I |u'|^p dt \right)^{1/p}$$

donc si A est bornée dans $W^{1,p}(I)$ avec $p \in]1, +\infty[$

alors A est unif^t-bornée et équi-continue dans $C^0(\bar{I})$

donc par le th. d'Ascoli, A est relativement compact dans $C^0(\bar{I})$

et donc dans $L^p(I)$.

(l'injection $W^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\bar{\Omega})$ n'est pas compacte : considérer (f_n) identité approchée)

- Cas $m \geq 2$: on a plus généralement:

$$\text{si } \Omega \text{ borné et } C^1, \begin{cases} W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\bar{\Omega}) \text{ si } p > m \\ W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q \geq m \text{ si } p = m \\ W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega) \text{ si } p < m \text{ avec } p^* = \frac{mp}{m-p} \\ \qquad \qquad \qquad \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q \in [p, p^*[. \end{cases}$$

GAGLIARDO
NIRENBERG
SOBOLEV Ineq

(on appelle ce type de résultats des injections de Sobolev : cf BREZIS par exemple)

et donc dans tous les cas on a $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$

car si $p > m$, $C^0(\bar{\Omega}) \subset L^p(\Omega)$

si $p = m$, on peut prendre $q = m$

et si $p < m$, on a $\frac{1}{p^*} < \frac{1}{p}$ donc $p^* > p$ donc on peut prendre $q = p$

KORREY

Rq : • si $p > m$, on a même $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ avec $\alpha = 1 - \frac{m}{p}$

• le cas $H_0^1(\Omega)$ ne requiert pas de régularité sur Ω car on a $\forall u \in H_0^1(\Omega)$, la fonction $\tilde{u} = \begin{cases} u & \text{sur } \Omega \\ 0 & \text{sur } \Omega^c \end{cases}$ est dans $H^1(\Omega)$

ce qui donne opérateur d'extension $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow H^1(\mathbb{R}^n)$.

desorte que

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{N}$$

I.2) Principe du maximum

Ici on préfère la forme non divergente: Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{L}u(x) = - \underbrace{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}} + b \cdot \nabla u + c u$$

$$\text{avec } a_{ij} = a_{ji} \quad = \text{Tr}(A(x) D^2 u)$$

Rappel: si les coefficients sont réguliers, l'opérateur sous forme divergence peut se mettre sous cette forme.

- l'hypothèse de symétrie est "sans perte de généralité".

Th • principe faible du maximum

On suppose a_{ij}, b_i, c continus sur $\bar{\Omega}$ et $\mathcal{L}$ elliptique

Soit $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$

(Astuce: penser "u convexe")

→ on suppose $c = 0$ et $\mathcal{L}u \leq 0$ sur Ω

$$\text{Alors} \quad \max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u \quad (\text{i.e. } u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u \quad \forall x \in \bar{\Omega})$$

→ on suppose $c \geq 0$ et $\mathcal{L}u \leq 0$ sur Ω

$$\text{Alors} \quad \max_{\bar{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+$$

$$(\text{i.e. } u \leq \max \{ 0, \max_{\partial\Omega} u \}.)$$

$$Rq : \bullet \quad c=0 \text{ et } Lu \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u$$

$$c \geq 0 \text{ et } Lu \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \min_{\overline{\Omega}} u \geq -\max_{\partial\Omega} u$$

• On parle de cadre classique car on suppose u assez régulière.
On peut aussi aborder le cadre des solutions faibles.

si $u \in H^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, $c=0$ et $Lu \leq 0$ au sens faible,

alors $\sup_{\overline{\Omega}} u \leq \sup_{\partial\Omega} u$ — cette hypothèse n'est pas essentielle, on peut s'en passer

si Ω est de classe C^1 , mais il faut utiliser les th. de trace qui permettent de donner sens à $u|_{\partial\Omega}$ pour $u \in H^1(\Omega)$.

cf BREzis (méthode de troncature de Stampacchia)

Preuve du principe faible : $\square$ cas $c=0$

• On suppose $Lu < 0$ sur Ω .

Par l'absurde, supposons que u atteint son max dans Ω :

il existe $x_0 \in \Omega$ t. $u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u$. Alors $\nabla u(x_0) = 0$
 $D^2 u(x_0) \leq 0$

Et donc $Lu(x_0) = \underbrace{-\operatorname{Tr}[A(x_0) D^2 u(x_0)]}_{\geq 0} + \underbrace{b(x_0) \cdot \nabla u(x_0)}_{=0} \geq 0$

d'où une contradiction.

On utilise le petit résultat: si $M, N \in S_n^+(\mathbb{R})$ alors $\text{Tr}(MN) \geq 0$

qui suit de: $M = M^{1/2} \cdot M^{1/2}$ donc $\text{Tr}(MN) = \text{Tr}(M^{1/2} N M^{1/2}) \geq 0$

et $M^{1/2} N M^{1/2} \in S_n^+$ puisque

$$X^T (M^{1/2} N M^{1/2}) X = \underbrace{(M^{1/2} X)^T}_{\in S_n^+} \underbrace{N (M^{1/2} X)}_{\in \mathbb{R}^m} \geq 0.$$

• Pour traiter le cas général, on regarde $u_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon e^{\mu x_1}$
avec $\varepsilon > 0$ et $\mu > 0$. ↙ constante d'ellipticité

$$\text{Alors } \mathcal{L} u_\varepsilon = \mathcal{L} u + \varepsilon \underbrace{\mathcal{L} [e^{\mu x_1}]}_{= -\mu^2 a_{11} + \mu b_1} \leq -\mu^2 \lambda + \mu \|b_1\|$$

donc à ε fixé on peut prendre μ grand de sorte que $\mathcal{L} u_\varepsilon < 0$

Par l'étape précédente, $u_\varepsilon \leq \max_{\partial \Omega} u_\varepsilon$ et on fait $\varepsilon \rightarrow 0$

■ cas $C \geq 0$:

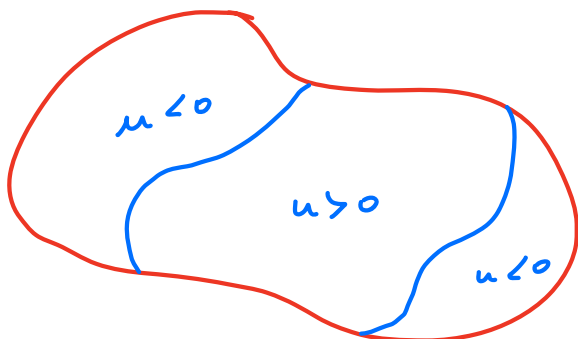
On a $\underbrace{(\mathcal{L} - C) u}_{\text{opérateur elliptique sans terme d'ordre 0}} \leq -C u \leq 0$ sur l'ouvert $\underbrace{\{u > 0\}}_{\text{"}}$

(supposé non vide)

donc par le cas précédent $u \leq \max_{\partial \{u > 0\}} u = \max_{\partial \Omega} u^+$

si $\{u > 0\}$ est vide, $u \leq 0 = \max_{\partial \Omega} u^+$

□



Rq: conséquence (de la version H^1 du principe) : si $c \geq 0$
 l'équation
$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A \nabla u) + b \cdot \nabla u + cu = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

 admet une unique solution $H_0^1(\Omega)$.

En effet, par l'alternative de Fredholm, il suffit de
 montrer que
$$\begin{cases} \mathcal{L}u = 0 \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \Rightarrow u = 0$$
 auquel cas il
 y aura existence (0 est solution triviale) et unicité pour $f=0$
 donc pour tout f .

Or $\mathcal{L}u \leq 0$ et $c \geq 0$ donne $u \leq 0$
 $\mathcal{L}u \geq 0$ et $c \geq 0$ donne $u \geq 0$ } $u = 0$.

Th (Principe du maximum fort)

On suppose Ω ouvert borné convexe, $c=0$ et $\mathcal{L}u \leq 0$.

Si $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ atteint son max dans Ω
 alors u est constant.

Rq : • dit autrement, soit u est constant

$$\text{soit } u < \max_{\partial\Omega} u \text{ sur } \Omega$$

• si $\Delta u \geq 0$, et u atteint son minimum, alors
 $c = 0$
 u est constant.

• si on suppose seulement $c \geq 0$ et $\Delta u \leq 0$
et si u atteint un maximum strictement positif,
alors u est constant.

L'outil central de la preuve est le lemme suivant

Lemme de Hopf

Soit $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, $c = 0$, $\Delta u \leq 0$, $x_0 \in \partial\Omega$

• On suppose que Ω satisfait la condition de boule intérieure
en x_0 , i.e. il existe B boule tq $\begin{cases} B \subset \Omega \\ x_0 \in \partial B \end{cases}$

• et $u(x_0) > u(x) \quad \forall x \in \Omega$

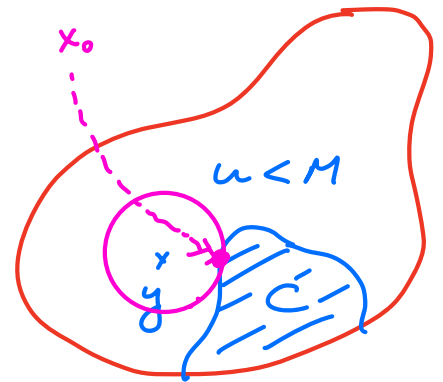
Alors $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0$ (v normale extérieure)

Rq : Avec $c \geq 0$, ça fonctionne en supposant de plus $u(x_0) \geq 0$

Preuve du principe du max fort à partir de Hoff:

On pose $M = \max_{\overline{\Omega}} u$ et $C = \{x \in \Omega, u(x) = M\}$ qui n'est pas $\emptyset$
si u n'est pas constant égal à M , on regarde $\{u < M\}$

On peut choisir $y \in \{u < M\}$ tel
 $d(y, \partial\Omega) > d(y, C)$



et B la plus grande boule de centre y qui reste dans $\{u < M\}$

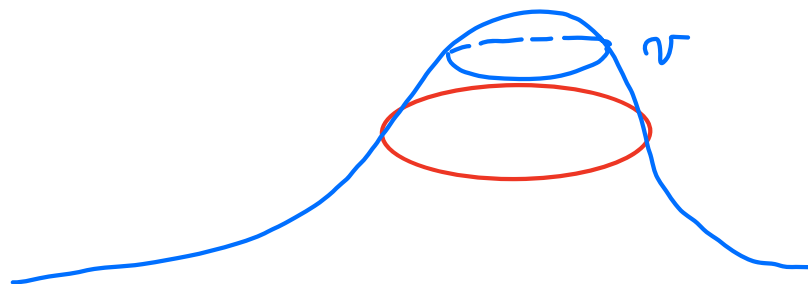
Alors l'ouvert $\{u < M\}$ satisfait la condition de boule intérieure
et $u(x_0) > u$ sur $\{u < M\}$ si $x_0 \in \partial B \cap C$.

Par le lemme de Hoff, $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0$ ce qui est une contradiction puisque $\nabla u(x_0) = 0$ vu que $x_0 \in \Omega$. $\square$

Preuve du lemme de Hoff : cas $C = 0$.

• On peut supposer $B = B(0, r)$; on pose $v(x) = e^{-\mu|x|^2} - e^{-\mu r^2}$

Alors $\frac{\partial v}{\partial x_i} = -2\mu x_i e^{-\mu|x|^2}$



$$d'ni \quad \mathcal{L}v(x) = - \sum_{i,j} a_{ij} \left[+4\mu^2 x_i x_j - 2\mu \delta_{ij} \right] e^{-\mu|x|^2} \\ - 2\mu(b.x) e^{-\mu|x|^2} \\ \leq e^{-\mu|x|^2} \left[-4\mu^2 \lambda |x|^2 + 2\mu \ln A(x) + 2\mu \|b\|_\infty |x| \right]$$

et dans l'anneau $\mathcal{A} = B(0, r) \setminus B(0, \frac{r}{2})$,

$$\mathcal{L}v(x) \leq e^{-\mu|x|^2} \left[-4\mu^2 \lambda \left(\frac{r^2}{4} \right) + 2\mu \|\ln A\|_{\infty, B(0,r)} + 2\mu \|b\|_\infty r \right] \\ \leq 0 \text{ si } \mu \text{ grand.}$$

• par continuité, il existe $\varepsilon > 0$ petit tq

$$u(x_0) \geq (u + \varepsilon v)(x) \quad \forall x \in \partial B(0, \frac{r}{2})$$

et de plus $u(x_0) \geq (u + \varepsilon v)(x) \quad \forall x \in \partial B(0, r)$ car
 $v = 0$ sur $\partial B(0, r)$

$$\bullet \text{ Ainsi } \begin{cases} \mathcal{L}[u + \varepsilon v - u(x_0)] \leq 0 \text{ sur } \mathcal{A} \\ u + \varepsilon v - u(x_0) \leq 0 \text{ sur } \partial \mathcal{A} \end{cases}$$

donc par principe faible $u + \varepsilon v - u(x_0) \leq 0$ sur $\mathcal{A}$

$$\text{or } [u + \varepsilon v - u(x_0)](x_0) = 0 \text{ donc } \frac{\partial}{\partial \nu} [u + \varepsilon v - u(x_0)] \geq 0$$

$$\text{i.e. } \frac{\partial u}{\partial \nu} \geq -\varepsilon \frac{\partial v}{\partial \nu}(x_0) = -\varepsilon \nabla v(x_0) \cdot x_0 = 2\mu \varepsilon r e^{-\mu r^2} > 0 \quad \square$$

I.3) Théorie de régularité.

On regarde les solutions de
$$\begin{cases} Lu = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

En passant par la méthode de Schauder pour trouver une solution "classique" ($C^{2,\alpha}$) il a été nécessaire d'étudier la régularité "a priori" pour obtenir à la fois existence et régularité.

Mais si on passe par la méthode d'existence d'une solution faible $u \in H^1(\Omega)$, on peut se demander a posteriori si cette solution est en fait plus régulière, grâce à l'équation.

Rq : Dans le cas du Laplacien, on peut observer : on met la norme de Frobenius.

$\forall u \in C_c^\infty(\Omega)$, $\|D^2 u\|_{L^2} = \|\Delta u\|_{L^2}$, donc il est raisonnable d'espérer que l'équation $-\Delta u = f$ (au sens faible) avec $f \in L^2(\Omega)$ donne $u \in H^2(\Omega)$.

Preuve de l'égalité :

$$\|D^2 u\|_{L^2}^2 = \int \sum_{i,j} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u \right)^2 = - \sum_{i,j} \int \left(\frac{\partial}{\partial x_i} u \right) \left[\frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j^2} u \right] = + \sum_{i,j} \int \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = \|\Delta u\|_{L^2}^2 \quad \square$$

Th (Régularité H^2 intérieure) Ω un ouvert $\subset \mathbb{R}^n$

Soit $\mathcal{L}$ sous forme divergence, elliptique, avec

$$a_{ij} \in C^1(\Omega), (b_i, c) \in L^\infty(\Omega), f \in L^2(\Omega)$$

Si $u \in H^1(\Omega)$ est solution faible de $\mathcal{L}u = f$ dans Ω

Alors $u \in H_{loc}^2(\Omega)$ et $\forall \omega$ ouvert $\subset\subset \Omega$ on a

$$\|u\|_{H^2(\omega)} \leq C \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)} \right)$$

où C dépend de $\omega, \Omega, \mathcal{L}$.

Avant de faire la preuve, on fait des remarques et on donne des variantes :

- Rq : • On n'a pas précisé de condition de bord, le résultat s'applique au pb de Dirichlet (homogène ou non) et au pb de Neumann.
- Comme $u \in H_{loc}^2$, on a $\mathcal{L}u = f$ au sens p.p.

(en effet $\underbrace{\int \mathcal{L}u \cdot \nabla \varphi + b \nabla u \cdot \varphi + c u \varphi}_{\int (\mathcal{L}u) \varphi \text{ car } u \in H_{loc}^2} = \int f \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$)

- On peut avoir une version d'ordre plus élevée :
si les coeff. de $\mathcal{L}$ sont assez réguliers,

$$f \in H^m(\Omega) \Rightarrow u \in H_{loc}^{m+2}(\Omega).$$

(il suffit de "dériver" l'équation : typiquement, si

$$-\Delta u = f \text{ alors } -\Delta \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial f}{\partial x_i} \text{ et on applique le cas } H^2)$$

- On peut chercher à avoir régularité jus qu'au bord:

si Ω est de classe C^2 , $a_{ij} \in C^1(\bar{\Omega})$, $b_i, c \in L^\infty(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$

et $u \in H_0^1(\Omega)$ est solution faible de $\begin{cases} \mathcal{L}u = f \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$

$$\text{Alors } u \in H^2(\Omega) \text{ et } \|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)} \right)$$

où $C = C(\Omega, \mathcal{L})$.

(Dans le cas où on peut appliquer Lax-Milgram et $u \in H_0^1(\Omega)$ est l'unique solution du pb on avait vu que $\|u\|_{H^1} \leq C \|f\|_{L^2}$, donc finalement l'estimation précédente devient $\|u\|_{H^2} \leq C \|f\|_{L^2}$)

Pour la preuve, il faut commencer par le cas

$$\Omega = B(0,1) \cap \mathbb{R}_+^m \text{ (où } \mathbb{R}_+^m = \mathbb{R}^{m-1} \times [0, +\infty[)$$

avec la même méthode que pour le cas intérieur pour les dérivées discrètes en les $(n-1)$ premières variables (et donc $\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \nabla u \right)$)

pas les mêmes constantes

et en utilisant l'équation pour contrôler $\frac{\partial^2}{\partial x_n^2} u$.

Ensuite, il faut utiliser une carte pour passer d'un voisinage intérieur de $x_0 \in \partial \Omega$ à $B(0,1) \cap \mathbb{R}_+^n$.

Notons qu'avec un tel changement de variable, on "reste" un opérateur elliptique d'ordre 2 sous forme divergenceielle. (ce qui ajoute une motivation supplémentaire à traiter ce cas même si on n'est intéressé que par $-\Delta u = f$)

- On peut également itérer l'énoncé précédent pour finalement obtenir (par exemple)

Th | si Ω est de classe C^∞ , $a_{ij}, b_i, c \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$
Alors $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$

- En fin, on peut également avoir des résultats L^p plutôt que L^2 :
 $\Delta u = f$ avec $f \in L^p$ ($p \in]1, +\infty[$) $\Rightarrow u \in W_{loc}^{2,p}$ mais c'est beaucoup plus dur car on ne peut pas utiliser de méthode énergétique.

La preuve utilise l'inégalité de Calderón-Zygmund (1952)

$$\text{à savoir } \|D^2 u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_p \|\Delta u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad \forall u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$$

Ceci se réécrit $\|D^2(G * f)\|_p \leq C_p \|f\|_p$

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \\ u &= G * f. \end{aligned}$$

Ici on peut voir $D^2(G*f) = (\mathbb{D}^2 G)*f$

où $D^2 G$ est compris au sens des distributions et sont des distrib. de type "valeur principale".

$$G(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln|x| & \dim=2 \\ \frac{C_m}{|x|^{m-2}} & \dim \geq 3 \end{cases}$$
$$G \in L^1_{loc}$$

→ Théorie des intégrales singulières (exemple élémentaire : la

transformée de Hilbert $Hf(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{f(y)}{|x-y|} dy$)

Une attaque possible de démonstration se fait par interpolation, en ayant une continuité " L^1 -faible" et " L^2 -fort" donc L^p -fort pour $p \in]1, 2]$ puis par dualité pour $p \in [2, \infty[$.

Preuve de la régularité H^2 intérieure.

• On se ramène à $b_i = c = 0$ car $-\operatorname{div}(A \nabla u) = \underbrace{f - b \cdot \nabla u - cu}_{\in L^2}$

• On va faire des dérivées discrètes: pour $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $h \in [1, m]$, on pose $\partial_{h,h} u(x) = \frac{u(x+h e_h) - u(x)}{h}$

et on a alors la formule d'intégration par partie discrète:

$$\int \partial_{h,h} u(x) \varphi(x) = \frac{1}{h} \left(\int u(x+h e_h) \varphi(x) - \int u(x) \varphi(x) \right)$$

$$= \frac{1}{h} \int u(x) \left[\frac{\varphi(x-h e_h) - \varphi(x)}{h} \right]$$

$$= - \int u(x) \partial_{h,-h} \varphi(x)$$

Si on a la place pour faire une translation dans la 1ère intégrale.

Cas 1 : on suppose $-\Delta u = f$ au sens faible sur $\mathbb{R}^n$

$$\text{i.e. } \begin{cases} \int \nabla u \cdot \nabla \varphi = \int f \varphi & \forall \varphi \in H^1(\mathbb{R}^n) \\ u \in H^1(\mathbb{R}^n). \end{cases}$$

Alors on peut prendre $\varphi = \partial_{h,h}(\partial_{h,h} u) \in H^1(\mathbb{R}^n)$

$$\text{et } \int \nabla u \cdot [\partial_{h,h}(\partial_{h,h} \nabla u)] = \int f(\partial_{h,h} \partial_{h,h} u)$$

$$\int |\partial_{h,h} \nabla u|^2 \leq \|f\|_2 \cdot \|\partial_{h,h} \partial_{h,h} u\|_2$$

$$\text{mais } \|\partial_{h,h} v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \quad \forall v \in H^1(\mathbb{R}^n)$$

car si $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, on pose $g(t) = v(x + t e_h)$ et alors

$$v(x + h e_h) - v(x) = g(h) - g(0) = \int_0^h g'(t) dt = \int_0^h \frac{\partial v}{\partial x_h}(x + t e_h) dt$$

$$\text{soit } |v(x + h e_h) - v(x)|^2 \leq \int_0^h 1^2 dt \cdot \int_0^h \left(\frac{\partial v}{\partial x_h}\right)^2(x + t e_h) dt.$$

$$\begin{aligned} \text{soit } \int_{\mathbb{R}^n} |\partial_{h,h} v|^2 dx &\leq \frac{1}{h} \int_0^h \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\partial v}{\partial x_h}\right)^2(x + t e_h) dx}_{= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\partial v}{\partial x_h}\right)^2(x) dx} dt \leq \|\nabla v\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

$$\text{et donc } \int |\partial_{h,h} \nabla u|^2 \leq \|f\|_2 \|\nabla \partial_{h,h} u\|_2$$

$$\text{d'où } \|\partial_{h,h} \nabla u\|_2 \leq \|f\|_2.$$

mais maintenant on observe que si $v \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et

$$\|\partial_{h,h} v\|_2 \leq C \text{ pour tout } h \text{ (petit non nul) alors}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x_h} \in L^2(\mathbb{R}^n) \text{ et } \left\| \frac{\partial v}{\partial x_h} \right\|_{L^2} \leq C.$$

En effet $\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\left| \int v \frac{\partial \varphi}{\partial x_h} \right| = \left| \lim_{h \rightarrow 0} \int v \partial_{h,h} \varphi \right| = \left| \lim_{h \rightarrow 0} \int (-\partial_{h,h} v) \varphi \right|$$

$\leq C \|\varphi\|_2$ donc par le théorème de Riesz dans l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n)$, on a bien $\frac{\partial v}{\partial x_h} \in L^2(\mathbb{R}^n)$

$$\text{et } \left\| \frac{\partial v}{\partial x_h} \right\|_2 = \sup_{\substack{\varphi \in C_c^\infty \\ \|\varphi\|_2 = 1}} \left\langle \frac{\partial v}{\partial x_h}, \varphi \right\rangle \leq C$$

et donc finalement $\frac{\partial}{\partial x_h} \nabla u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ pour tout $h \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$\text{i.e. } u \in H^2(\mathbb{R}^n) \text{ et } \|D^2 u\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}.$$

et comme l'équation donne $\int |\nabla u|^2 \leq \|f\|_{L^2} \|u\|_{L^2}$ on a bien

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^2}^2 &\leq \|f\|_{L^2}^2 + (\|f\|_{L^2} \|u\|_{L^2}) + \|u\|_{L^2}^2 \\ &\leq (\|f\|_{L^2} + \|u\|_{L^2})^2 \text{ d'où le résultat.} \end{aligned}$$

Cas 2: On suppose $-\Delta u = f$ sur Ω . Pour $\omega \subset \Omega$

on introduit χ une fonction "cut-off" $\chi \in C_c^\infty(\Omega)$, $0 \leq \chi \leq 1$
 et alors $\chi = 1$ sur ω

$$-\Delta(\chi u) = \underbrace{(-\Delta \chi)u - 2\nabla \chi \cdot \nabla u - 2\chi \Delta u}_{\in L^2(\mathbb{R}^n)} + 2\chi f$$

car ∇u intervient
 dans le 2nd
 membre

et donc $\chi u \in H^2(\mathbb{R}^n)$ et $\|\chi u\|_{H^2(\mathbb{R}^n)} \leq C(\|f\|_2 + \|u\|_{H^1})$
 $\leq \tilde{C}(\|f\|_2 + \|u\|_{L^2})$ en utilisant l'énergie.

et donc on conclut car $\|u\|_{H^2(\omega)} \leq \|\chi u\|_{H^2(\mathbb{R}^n)}$.

Cas 3: pour l'équation $-\operatorname{div}(A \nabla u) = f$ sur Ω :

pour $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, $h \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $h \neq 0$ assez petit ($|h| < \operatorname{dist}(\operatorname{supp} \varphi, \partial \Omega)$)

on a $\partial_{e_h, -h} \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ et donc par la formulation faible et IPP discrète

$$\int \partial_{e_h, -h} [A \nabla u] \cdot \nabla \varphi = \int f \partial_{e_h, -h} \varphi$$

mais par calcul élémentaire:

$$\begin{aligned} \partial_{e_h, -h} [A \nabla u] &= \frac{A(x + h e_h) \nabla u(x + h e_h) - A(x) \nabla u(x)}{h} \\ &= \frac{A(x + h e_h) [\nabla u(x + h e_h) - \nabla u(x)] + [A(x + h e_h) - A(x)] \nabla u(x)}{h} \end{aligned}$$

$$= \tau_{h,h} A \cdot \partial_{h,h}(\nabla u) + \partial_{h,h} A \cdot \nabla u \quad \text{où } \tau_{h,h} A(n) = A(n + h e_n)$$

$$\text{d'où} \quad \int (\tau_{h,h} A) \partial_{h,h} \nabla u \cdot \nabla \varphi \leq \left(\|A\|_{C^1} \cdot \|\nabla u\|_2 + \|f\|_2 \right) \|\nabla \varphi\|_2$$

Maintenant on prend $\varphi = \chi^2 \cdot \partial_{h,h} u$ qui est bien défini pour h petit (là où $\partial_{h,h} u$ n'est pas défini (car $x + h e_n \notin \Omega$) on a $\chi = 0$)

(on n'a pas $\varphi \in C_c^\infty$ mais on a $\varphi \in H^1$ et $\text{supp } \varphi \subset \Omega$ donc on peut procéder par densité)

$$\text{et donc dans ce cas } \nabla \varphi = 2\chi(\nabla \chi) \partial_{h,h} u + \chi^2 \partial_{h,h}(\nabla u)$$

$$\text{donc} \quad \underbrace{\int \chi^2 (\tau_{h,h} A \cdot \partial_{h,h} \nabla u) (\partial_{h,h} \nabla u)}_{\text{}} \leq \begin{cases} \left[\|A\|_{C^1} \cdot \|\nabla u\|_2 + \|f\|_2 \right] \left[2\|\nabla \chi\|_\infty \|\nabla u\|_2 + \|\chi^2 \partial_{h,h} \nabla u\|_2 \right] \\ + 2\|A\|_\infty \int |\chi \nabla \chi \cdot \partial_{h,h} u \partial_{h,h} \nabla u| \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2\|\chi \partial_{h,h} \nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \underbrace{C_1 \|\nabla u\|^2 + C_2 \|f\|_2 \|\nabla u\|_2}_{\text{}} + \underbrace{(C_3 \|\nabla u\|_2 + C_4 \|f\|_2) \|\chi \partial_{h,h} \nabla u\|_2}_{\text{}} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \|\chi \partial_{h,h} \nabla u\|_2^2 + \frac{1}{2\varepsilon} [C_3 \|\nabla u\|_2 + C_4 \|f\|_2]^2 \end{aligned}$$

avec l'inégalité (de Young)

$$ab \leq \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2$$

et on prend $\varepsilon = \lambda$ et alors

$$\| \mathcal{I}_{h,h} \nabla u \|_{L^2(\omega)}^2 \leq C \left(\|\nabla u\|_2 + \|f\|_2 \right)^2$$

et on conclut comme précédemment que $u \in H^1(\omega)$

et avec l'estimation annoncée

□

II) EDP elliptiques non linéaires

On peut rencontrer de nombreuses versions non-linéaires des EDP elliptiques d'ordre 2.

Equations semi-linéaires : $-\Delta u = f(u)$

Equations quasi-linéaires : $-\operatorname{div} A(\nabla u) = f$,

ex 1 : $-\operatorname{div} [|\nabla u|^{p-2} \nabla u] = f$
appli "p-Laplacien" et noté Δ_p

ex 2 : $-\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) = 0$ ou f
équation de courbure moyenne prescrite
nulle.

Equations complètement non-linéaires

$$F(D^2u, \nabla u, u) = f$$

ex : $-\det(D^2u) = f$ appelée équation de Monge-Ampère.

Rq : Une équation $F(D^2u, \nabla u, u, x) = 0$ est dite elliptique
 Q, p, u, x

si $\partial_Q F = \left(\frac{\partial F}{\partial q_{ij}} \right)$ est elliptique i.e. $-\sum_{i,j} \left(\frac{\partial F}{\partial q_{ij}} \right) \xi_i \xi_j \geq 2 |\xi|^2$

ex : $F(Q, x) = -\operatorname{Tr}(A(x) \cdot Q) = -\sum a_{ij}(x) q_{ij}$

$$\text{Alors } \partial_Q F(Q, x) = -A(x)$$

ex: Pour l'équation de courbure,

$$\begin{aligned}
 -\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) &= -\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\frac{\partial}{\partial x_i} u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \right] \\
 &= -\frac{\Delta u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} + \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} u \right) \cdot \frac{\cancel{2} \sum_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u \cdot \frac{\partial u}{\partial x_j}}{\cancel{2} (1+|\nabla u|^2)^{3/2}} \\
 &= -\frac{\Delta u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} + \sum_{i,j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_j} \cdot \frac{1}{(1+|\nabla u|^2)^{3/2}}
 \end{aligned}$$

$$\text{i.e. } F(Q, p) = -\frac{\operatorname{Tr} Q}{\sqrt{1+|p|^2}} + \frac{p^T Q}{(1+|p|^2)^{3/2}}$$

$$\text{donc } \partial_Q F(Q, p) = \left(-\frac{\delta_{ij}}{\sqrt{1+|p|^2}} + \frac{p_i p_j}{(1+|p|^2)^{3/2}} \right)$$

$$\begin{aligned}
 \text{et } -\zeta^T (\partial_Q F) \zeta &= \frac{|\zeta|^2}{\sqrt{1+|p|^2}} - \frac{(p \cdot \zeta)^2}{(1+|p|^2)^{3/2}} \geq \frac{(1+|p|^2)|\zeta|^2 - |p|^2|\zeta|^2}{(1+|p|^2)^{3/2}} \\
 &\geq \frac{|\zeta|^2}{(1+|p|^2)^{3/2}}
 \end{aligned}$$

Elliptique si on a $|\nabla u|$ borné.

ex pour l'équation de Monge-Ampère, on a $F(Q) = -\det Q$

$$\text{et } D_Q F(Q) \cdot H = -\operatorname{Tr}((\operatorname{Cm} Q)^T \cdot H)$$

$$\text{i.e. } \partial_Q F(Q) = (\operatorname{Cm} Q)^T = \frac{Q^{-1}}{\det Q} \text{ est positive si } Q \text{ est positive i.e. } \\ \text{est convexe.}$$

II.1) Méthodes variationnelles

L'idée est de généraliser le principe de Dirichlet

$$\left(\begin{cases} -\Delta u = f & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (\Leftrightarrow) \quad u \in \arg\min \left\{ \frac{1}{2} \int |\nabla u|^2 - \int f u, u \in H_0^1(\Omega) \right\} \right)$$

au sens faible

et d'utiliser cette formulation pour étudier l'EDP.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ un ouvert (en général borné et régulier)

$$\begin{aligned} \text{et } L : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, u, \xi) &\mapsto L(x, u, \xi) \end{aligned}$$

$$\text{On pose alors } I(w) = \int_{\Omega} L(x, w(x), \nabla w(x)) \, dx$$

pour $w : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (sous réserve que cette énergie soit bien définie, ce qui est le cas par exemple si Ω est borné et $w \in C^1(\overline{\Omega})$)

On va s'intéresser aux problèmes du type

$$\min \{ I(w), w \in X \}$$

où X est un espace fonctionnel.

(On appelle un tel problème un pb de calcul de variations)

Réf : Introduction to the calculus of variations, 4th edition, Dacorogna
2024)

Th (Equation d'Euler-Lagrange)

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert borné de classe C^1 , $p \geq 1$, $g \in W^{1,p}_0(\Omega)$

et $L \in C^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ $\hookrightarrow \left| \frac{\partial L}{\partial u} \right|, \left| \frac{\partial L}{\partial z_i} \right| \leq C(1 + |u|^{p-1} + |z_i|^{p-1})$ } *non optimal*

• soit $u \in g + W^{1,p}_0(\Omega)$ solution de

$$\inf \left\{ I(w) = \int_{\Omega} L(x, w, \nabla w), w \in g + W^{1,p}_0(\Omega) \right\}$$

Alors u satisfait

$$\forall \varphi \in W^{1,p}_0(\Omega), \int_{\Omega} \left[\frac{\partial L}{\partial u}(x, u, \nabla u) \varphi + \frac{\partial L}{\partial z_i}(x, u, \nabla u) \cdot \nabla \varphi \right] = 0$$

(qu'on appelle formulation faible de l'équation d'Euler-Lagrange)

Si de plus, L est C^2 et $u \in C^2(\bar{\Omega})$, alors

$$\operatorname{div} \left[\frac{\partial L}{\partial z_i}(x, u, \nabla u) \right] = \frac{\partial L}{\partial u}(x, u, \nabla u) \text{ sur } \bar{\Omega}$$

(qu'on appelle équation d'Euler-Lagrange (version forte))

• Réciproquement, si pour tout $x \in \bar{\Omega}$, $(u, z) \mapsto L(x, u, z)$ est convexe

et si $u \in g + W^{1,p}_0(\Omega)$ est solution de la forme faible de

l'équation d'Euler-Lagrange, alors u est solution de

$$\min \left\{ \int_{\Omega} L(x, u, \nabla u), u \in g + W^{1,p}_0(\Omega) \right\}.$$

R₇: Les hypothèses de croissance de L permettent de donner sous
à la forme faible de l'équation d'Euler-Lagrange. Elles impliquent
que I est bien définie (voir étape 1 de la preuve)

Exemples: on retrouve le principe de Dirichlet si

$$L(x, u, z) = \frac{1}{2} |z|^2 - f(x)u$$

- si $L(x, u, z) = \frac{1}{p} |z|^p - f(x)u$ avec $p \in]1, +\infty[$ et $f \in L^p(\Omega)$

on obtient une formulation faible de

$$\begin{cases} \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = f & \text{sur } \Omega \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

- si $L(x, u, z) = \sqrt{1 + |z|^2}$ on peut appliquer le théorème avec $p=1$

et on obtient une formulation faible de $\begin{cases} \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}\right) = 0 & \text{sur } \Omega \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$
qui est l'équation
de surface minimale.

Preuve : • Comme $\forall x, u, z \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$

$$L(x, u, z) = L(x, 0, 0) + \int_0^1 \frac{d}{dt} L(x, tu, tz) dt$$

l'hypothèse sur $\frac{\partial L}{\partial u}, \frac{\partial L}{\partial z}$ implique

$$|L(x, u, z)| \leq C(1 + |u|^p + |z|^p)$$

et donc I est bien définie et $I(u) < \infty \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega)$

• Dérivée de I : soit $u, \varphi \in W^{1,p}(\Omega)$: alors

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{I(u+t\varphi) - I(u)}{t} = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial L}{\partial u} \right)(x, u, \nabla u) \varphi + \left(\frac{\partial L}{\partial z} \right)(x, u, \nabla u) \cdot \nabla \varphi$$

En effet si on pose $f_s(x) = L(x, u(x) + st\varphi(x), \nabla u(x) + st\nabla\varphi(x))$ (il s'agit d'une dérivée directionnelle)

de sorte que

$$\frac{I(u+t\varphi) - I(u)}{t} = \frac{1}{t} \int_{\Omega} (f_1 - f_0) = \frac{1}{t} \int_{\Omega} \int_0^1 \frac{d}{ds} (f_s) ds$$

$$= \frac{1}{t} \int_{\Omega} \int_0^1 \left(\frac{\partial L}{\partial u}(x, u+st\varphi, \nabla u+st\nabla\varphi) \cdot t\varphi + \frac{\partial L}{\partial z}(x, u+st\varphi, \nabla u+st\nabla\varphi) \cdot t\nabla\varphi \right) ds$$

or l'intégrande converge vers $\frac{\partial L}{\partial u}(x, u, \nabla u) \cdot \varphi + \frac{\partial L}{\partial z}(x, u, \nabla u) \cdot \nabla \varphi$

quand $t \rightarrow 0$ (par continuité de $\frac{\partial L}{\partial u}$ et $\frac{\partial L}{\partial z}$)

et on a la domination par

$$C (1 + |u + st\varphi|^{p-1} + |\nabla u + st \nabla \varphi|^{p-1}) (|\varphi| + |\nabla \varphi|)$$

$$\text{or } |a+b|^{p-1} \leq (|a|+|b|)^{p-1} \leq (2\max(|a|,|b|))^{p-1} \\ \leq 2^{p-1} (|a|^{p-1} + |b|^{p-1})$$

donc on domine pour tout $t, s \in [-1, 1] \times [0, 1]$

$$C (1 + |u|^{p-1} + |\varphi|^{p-1} + |\nabla u|^{p-1} + |\nabla \varphi|^{p-1}) (|\varphi| + |\nabla \varphi|)$$

qui est indépendante de t et est dans $L^1([0, 1] \times \Omega)$

$$(\text{car } \int |u|^{p-1} |\varphi| \leq \left(\int |u|^{(p-1)q} \right)^{1/q} \left(\int |\varphi|^{q'} \right)^{1/q'} < \infty$$

$$\text{avec } q = \frac{p}{p-1} \text{ de sorte que } \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} \text{ i.e. } q = p' \\ \text{et } q' = p.$$

et de même pour les autres termes)

donc par le th de convergence dominée, on obtient la formule annoncée.

Ainsi, si u est minimum, on a

$$\forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega), \forall t \in \mathbb{R}, \quad I(u + t\varphi) \geq I(u)$$

$$\text{d'où } \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad I'(u) \cdot \varphi = 0$$

• Passage de la version faible à forte: on intègre par partie la formulation faible: $\forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega),$

$$\int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} \cdot \varphi + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_i} \right) \cdot \nabla \varphi = \int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} \cdot \varphi - \left[\operatorname{div} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_i} \right) \right] \cdot \varphi = 0$$

• Réciproque : avec l'hypothèse de convexité de $L(x, \cdot, \cdot)$ on a la convexité de I . Donc si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ est solution de l'équation d'Euler-Lagrange (au sens faible), i.e.

$$\forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad I'(u) \cdot \varphi = 0, \text{ alors}$$

$$\forall v \in g + W_0^{1,p}(\Omega), \quad I(v) \geq I(u) + I'(u) \cdot \underbrace{(v-u)}_{\in W_0^{1,p}} = I(u)$$

(La différentiabilité directionnelle suffit à avoir cette caractérisation de la convexité ($I(y) \geq I(x) + I'(x) \cdot (y-x)$) via la dérivée première) □

Th (Existence)

Soit Ω ouvert borné de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$, $g \in W^{1,p}(\Omega)$ pour $p > 1$ et $L \in C^0(\bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$

- $L(x, u, z) \geq \alpha_1 |z|^p + \alpha_2$ avec $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ (convexité)
- $L(x, u, z) \leq C(1 + |u|^p + |z|^p)$
- $\forall x, (u, z) \mapsto L(x, u, z)$ est convexe

Alors le pb $\min \left\{ I(w) = \int_{\Omega} L(x, w, \nabla w), w \in g + W_0^{1,p}(\Omega) \right\}$

admet une solution.

Si de plus $\forall x, u, L(x, u, \cdot)$ est strictement convexe, ce minimum est unique.

Rq : Attention, ça ne fonctionne pas si $p=1$, donc en particulier pas pour l'équation de surface minimale

(voir DACOROGNA Chap 5, GILBARG-TRUDINGER Chap 16)

(Pb de Bernstein: si $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ satisfait $\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \right) = 0$

peut-on conclure que u est linéaire?

c'est vrai si et seulement si $n \leq 7$!)

Preuve : On applique la méthode directe du calcul de variations :

- Par la majoration de L , $I(w) < \infty \quad \forall w \in W^{1,p}(\Omega)$

et de plus par la minoration de L ,

$$I(w) \geq \alpha_1 \int |\nabla w|^p + \alpha_2 \geq \alpha_2 \text{ donc il existe}$$

(u_n) une suite minimisante, i.e.

$$\begin{cases} \forall n, u_n \in g + W_0^{1,p}(\Omega) \\ I(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} m := \inf \{ I(w), w \in g + W_0^{1,p}(\Omega) \} \in \mathbb{R} \end{cases}$$

- Compacité : pour n assez grand,

$$\alpha_1 \int |\nabla u_n|^p + \alpha_2 \leq m + 1 \text{ i.e. } \|\nabla u_n\|_p \text{ bornée}$$

et par l'inégalité de Poincaré, $\|u_n - g\|_p \leq C \|\nabla(u_n - g)\|_p$

donc (u_n) est bornée dans $W^{1,p}(\Omega)$.

Comme $W^{1,p}(\Omega)$ est réflexif et séparable, par le th. de Banach-Alaoglu "séparable", il existe $u \in W^{1,p}(\Omega)$ tq

$u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $W^{1,p}(\Omega)$, à extraction près.

De plus $g + W_0^{1,p}(\Omega)$ est un convexe fermé de $W^{1,p}(\Omega)$, il est donc faiblement fermé, donc $u \in g + W_0^{1,p}(\Omega)$.

• Semi-continuité inférieure :

par l'hypothèse de convexité sur $L(x, \cdot, \cdot)$, I est convexe.

Or I est fortement continue sur $W^{1,p}(\Omega)$

(si $u_n \xrightarrow{W^{1,p}} u$, alors par "réciproque du th de convergence dominée",

à extraction près on a $u_n \rightarrow u$ p.p. et $|u_n| \leq w \in L^p$

$\nabla u_n \rightarrow \nabla u$ p.p. $|\nabla u_n| \leq W \in L^p$

et donc $L(x, u_n, \nabla u_n) \rightarrow L(x, u, \nabla u)$ p.p.

$$\begin{aligned} \text{et } |L(x, u_n, \nabla u_n)| &\leq C(1 + |u_n|^p + |\nabla u_n|^p) \\ &\leq C(1 + |w|^p + |W|^p) \in L^1 \end{aligned}$$

donc le th. de conv dominée s'applique)

et donc séq. faiblement semi-continue inférieurement par convexité

$$\text{i.e. } u_n \rightarrow u \text{ faible } W^{1,p} \Rightarrow \liminf_{n \rightarrow \infty} I(u_n) \geq I(u).$$

Interlude : si C est un convexe fermé d'un Banach E et
si $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ est (fortement) continue et convexe,
alors f est séquentiellement faiblement s.c.i

En effet soit $(x_n) \in C^N$ et $x \in C$ tq $x_n \rightarrow x$.

si $\liminf f(x_n) = +\infty$, il n'y a rien à montrer.

sinon on pose $\alpha = \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

Il existe σ extraction tq $f(x_{\sigma(n)}) \rightarrow \alpha$.

On suppose $\alpha > -\infty$: soit $\varepsilon > 0$. L'ensemble $\{J \leq \alpha + \varepsilon\}$ est convexe et
fortement fermé (par continuité de J) donc est faiblement fermé,
et C fermé
et donc comme pour n grand, les $(x_{\sigma(n)})$ sont dans cet ensemble,
 x également et donc $J(x) \leq \alpha + \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$ d'où

le résultat.
Par l'absurde, si $\alpha = -\infty$, l'ensemble $\{J \leq M\}$ est fermé convexe
pour tout M , donc faiblement fermé, donc $J(x) \leq M$ pour tout M ,

ce qui est une contradiction puisque $J(u) < \infty$.

• En combinant les deux points précédents, on a

$$I(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} I(u_n) = m \quad \text{donc } u \in g + W_0^{1,p}(\Omega) \text{ est bien solution.}$$

• L'unicité suit facilement de l'hypothèse de stricte convexité :

si u_1, u_2 sont solutions, alors $\frac{u_1 + u_2}{2}$ aussi,

$$\text{et donc } \underbrace{\int L(x, u_1, \nabla u_1) + L(x, u_2, \nabla u_2) - L(x, \frac{u_1 + u_2}{2}, \frac{\nabla u_1 + \nabla u_2}{2})}_{\geq 0} = 0$$

$$\text{donc } L(x, u_1, \nabla u_1) + L(x, u_2, \nabla u_2) - L(x, \frac{u_1 + u_2}{2}, \frac{\nabla u_1 + \nabla u_2}{2}) = 0 \text{ p.p.}$$

$$\text{donc } u_1 = u_2 \text{ p.p.}$$

□

Rq: Le théorème reste valable si on a seulement

$$\forall (x, u), \quad z \mapsto L(x, u, z) \text{ est convexe.}$$

En effet, par l'étape de compacité, on a (u_n) bornée $W^{1,p}(\Omega)$

$$\text{donc par le th. de Rellich on a } \begin{cases} u_n \rightharpoonup u & W^{1,p} \\ \text{et } u_n \rightarrow u & L^p \end{cases} \quad (\text{à extra-dim près})$$

et on peut voir que cela suffit à montrer $\liminf_{n \rightarrow \infty} I(u_n) \geq I(u)$

(cf EVANS p.468, utilise le th. d'Egoroff)

Remarques : • On peut étudier la question de la régularité des solutions

Par exemple (voir **DACOROGNA § 4.3.3** ou **EVANS § 8.3**) si

$$I(u) = \int F(x, \nabla u) - f(x)u \text{ avec } F(x, \cdot) \text{ convexe, } C^2$$

$$\hookrightarrow \sum_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} F(x, z) z_i z_j \geq c |z|^2 \quad (+ \text{autres conditions de croissance sur } F)$$

alors on peut appliquer la méthode des translations et montrer

que la solution u est H_{loc}^2

mais beaucoup d'autres cas existent.

• On peut aussi être amené à étudier des pbs de calcul de variation avec contraintes, et on a des multiplicateurs de Lagrange qui peuvent apparaître.

$$\underline{\text{ex}} : \min \left\{ \frac{1}{2} \int |\nabla w|^2, w \in H_0^1(\Omega), \int G(w) = 0 \right\}$$

$$\Downarrow$$
$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \int \nabla u \cdot \nabla \varphi = \lambda \int g(u) \varphi \quad (g = G')$$

$$\Downarrow$$
$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda g(u) & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

• On peut aussi envisager des systèmes d'EDP en prenant un pb de calcul de variations avec des fcts à valeurs vectorielles:

ex1: fonction harmoniques à valeurs dans des sphères:

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} |DW|^2, W \in g + H^1(\Omega; \mathbb{R}^m), |W| = 1 \text{ a.e. sur } \Omega \right\}$$

$$\Downarrow \sum_{i,j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

$$\forall V \in H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^m) \cap L^\infty, \int DW : DV = \int |DW|^2 U \cdot V \quad \& |U|=1$$

$\Downarrow$

Lagrange multiplier

$$\begin{cases} -\Delta U = |DW|^2 U & \text{sur } \Omega \\ U = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

$\& |U|=1$

ex2: pb de Stokes (stationnaire incompressible)

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} |DW|^2 - \int f \cdot W, W \in H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^3), \operatorname{div} W = 0 \right\}$$

$\Downarrow$

$$\exists p \in L^2_{loc}(\Omega), \forall V \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3), \int DW : DV = \int p \operatorname{div} V + \int f \cdot V$$

Lagrange multiplier $\Downarrow$

$$\begin{cases} -\Delta U + \nabla p = f & \text{sur } \Omega \\ \operatorname{div} U = 0 & \text{sur } \Omega \\ U = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ donnée})$$

- Enfin, pour des pbs qui ne sont pas convexes, on peut être amené à chercher des minima locaux et/ou des points critiques de pb de calcul de variations pour trouver des solutions à des EDP.

II.2) Autres méthodes

On va seulement évoquer quelques autres méthodes, on réfère à la littérature (EVANS-GILBARG-TRUDINGER par exemple) pour plus de détails.

Méthode de point fixe

Interlude :

Th de Schauder (généralisation des Th. de Brouwer aux espaces de Banach)

E espace de Banach réel et $K \subset E$ compact convexe.

Si $A : K \rightarrow K$ est continue, alors A admet un point fixe

On peut appliquer des variantes de ce résultat (LERAY-SCHAUDER) pour montrer existence de solutions à des EDP du type

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{qui ne peut pas entrer} \\ \text{dans le cas variationnel.} \end{array}$$

(Idée : on regarde $u \mapsto v$ unique sol de $-\Delta v = f(x, u)$ et on cherche un point fixe)

Pour obtenir la compacité de l'opérateur, on utilise les théories de régularité (soit dans les espaces $C^{k,\alpha}$ soit $W^{k,p}$)
 $\alpha \in]0,1[$ soit $p \in]1,\infty[$
 des eq. elliptiques linéaires.

Solutions de viscosité GRANDALL-LIONS pour le cas général
 Années '80

$$F(D^2u, \nabla u, u, x) = 0 \text{ dans } \Omega \text{ (avec condition de bord)}$$

où $F : S_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ qu'on suppose

décroissante en sa première variable,

Déf on dit que $u \in C^0(\Omega)$ est sur-solution de viscosité si

$\forall \varphi \in C^2(\Omega)$ $\hookrightarrow u - \varphi$ atteint un max local en x_0 ,
min

$$F(D^2\varphi(x_0), \nabla\varphi(x_0), \varphi(x_0), x_0) \leq 0$$

et on dit que u est solution de viscosité si u est à la fois
 sous et sur-solution de viscosité.

On recourra avec la méthode de Perron et

les principes de comparaison.

(utile pour les eq. de Monge-Ampère ou de Hamilton Jacobi Bellman)

CHAPITRE 4

Equations d'évolutions

Dans ce chapitre, on explique comment résoudre les équations de la chaleur ou des ondes

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f \text{ dans } [0, T] \times \Omega \\ u = 0 \text{ sur } [0, T] \times \partial\Omega \\ u|_{t=0} = u_0 \text{ sur } \Omega \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f \text{ dans } [0, T] \times \Omega \\ u = 0 \text{ sur } [0, T] \times \partial\Omega \\ u|_{t=0} = u_0, \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = u_1 \text{ sur } \Omega \end{array} \right.$$

et ses généralisations où on peut remplacer

$$-\Delta u \text{ par } \mathcal{L}_t u = -\operatorname{div}(A(t, x) \nabla u) + b(t, x) \cdot \nabla u + c(t, x) u$$

supposé elliptique, i.e. $\exists \lambda > 0, \forall x, \forall t, \forall \xi, \xi^T A(t, x) \xi \geq \lambda |\xi|^2$

(ces équations sont appelées paraboliques et hyperboliques respectivement)

ainsi que des variantes incluant des non linéarités.

I) Equations linéaires.

→ Eg. paraboliques On suppose Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $T \in \mathbb{R}_+$

et $a_{ij}, b_i, c \in L^\infty([0, T] \times \Omega)$, $f \in L^2([0, T] \times \Omega)$, $u_0 \in L^2(\Omega)$

et on pose

$$B_t(u, v) = \int_{\Omega} [A(t, x) \nabla u \cdot \nabla v + (b(t, x) \cdot \nabla u) v + c(t, x) u v] dx$$

pour $(u, v) \in H^1(\Omega)$ et $t \in [0, T]$.

Hermite

On regarde les solutions comme des fonctions $u: [0, T] \rightarrow H^1_0(\Omega)$.

Formellement si u est solution de $\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{L}_t u = f$

alors $\langle \frac{\partial u}{\partial t}, v \rangle + B_t(u, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H^1_0(\Omega)$

↑
produit scalaire de $L^2(\Omega)$

De plus $\frac{\partial u}{\partial t} = f - \mathcal{L}u = f - cu - \nabla b \cdot u + \operatorname{div}(A \nabla u) \in H^{-1}$

INTERLUDE: On pose $H^{-1}(\Omega) = (H^1_0(\Omega))'$

munie de la norme $\|f\|_{H^{-1}} = \sup \{ \langle f, u \rangle_{H^{-1} \times H^1_0}, \|u\|_{H^1_0} \leq 1 \}$

et on a la représentation

$f \in H^{-1} \Leftrightarrow \exists f_0, g \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega, \mathbb{R}^n), \langle f, \varphi \rangle_{H^{-1} \times H^1_0} = \int f_0 \varphi + g \cdot \nabla \varphi$

et alors $\|f\|_{H^{-1}} = \sqrt{\|f_0\|_2^2 + \|g\|_2^2}$ "f = f_0 - div g"

Attention : on n'identifie pas H^{-1} à H^1_0 par l'isométrie habituelle du th de Riesz car cette identification n'est pas "triviale" : en effet il s'agit de $H^{-1} \longrightarrow H^1_0$

$f \mapsto u$ l'unique solution de $\begin{cases} -\Delta u + u = f \\ u \in H^1_0 \end{cases}$ (cf la preuve ci-dessous)

et on préfère identifier L^2 à $(L^2)'$ mais écrire

$$H^1_0(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$$

avec $\forall v \in L^2, \forall \varphi \in H^1_0,$
 $\langle v, \varphi \rangle_{H^{-1} \times H^1_0} := \langle v, \varphi \rangle_{L^2}$

Preuve : Le produit scalaire sur $H^1_0(\Omega)$ est $(u, v) \mapsto \int \nabla u \cdot \nabla v + uv$

• Soit $f \in H^{-1}(\Omega)$. Par le th de Riesz il existe une unique $u \in H^1_0(\Omega)$ t.

$$\forall v \in H^1_0(\Omega), \int \nabla u \cdot \nabla v + uv = \langle f, v \rangle_{H^{-1} \times H^1_0} \quad (\text{i.e. } -\Delta u + u = f)$$

d'où le résultat avec $g = \nabla u$ et $f_0 = u$.

$$\text{et de plus } \|f\|_{H^{-1}} \stackrel{?}{=} \|u\|_{H^1} = \sqrt{\|f_0\|_2^2 + \|g\|_2^2}$$

clarifié dans le th. de Riesz.

• Réciproquement si " $f = f_0 - \text{div } g$ " avec $f_0, g \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega, \mathbb{R}^m)$

$$\begin{aligned} |\langle f, \varphi \rangle_{H^{-1} \times H^1_0}| &= \left| \int f_0 \varphi + g \cdot \nabla \varphi \right| \leq \|f_0\|_2 \cdot \|\varphi\|_2 + \|g\|_2 \cdot \|\nabla \varphi\|_2 \\ &\leq (\|f_0\|_2 + \|g\|_2) \|\varphi\|_{H^1_0} \end{aligned}$$

Pq : pour résoudre $\begin{cases} \mathcal{L}u = f \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$, il suffit d'avoir $f \in H^{-1}$
 (plutôt que $f \in L^2$, et on a $L^2 \subset H^{-1} \subset \mathcal{D}'$)
 pour appliquer Lax-Milgram

INTERLUDE sur les espaces fonctionnels "à valeurs dans un espace de Banach"

Soit X un espace de Banach.

- Il n'y a pas de difficulté à parler de $C^0([0, T], X)$ ou $C^k([0, T], X)$
- Pour les espaces $L^p([0, T], X)$ c'est plus délicat :

on parle de fonction mesurable ("forte") pour les fonctions qui sont limites presque partout de fonctions étagées (i.e. sommes finies d'indicatrices de Boréliens)

On dit que $f : [0, T] \rightarrow X$ est intégrable s'il existe (f_n) suite de fonctions étagées tq $f_n \xrightarrow{E} f$ p.p. (donc f fortement mesurable) et $\int_E \|f_n - f\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

et on pose $\int f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n$ (où si $g = \sum \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ est étagée, $\int g = \sum \alpha_i |A_i|$ comme d'habitude)

et on l'appelle intégrale de Bochner

On peut montrer : $\left\| \int_E u(t) dt \right\|_E \leq \int_E \|u(t)\|_E dt$

$$\text{et } \forall \ell \in E', \quad \left\langle \ell, \int_E u \right\rangle = \int_E \langle \ell, u(t) \rangle dt$$

En fin, on pose $\|u\|_{L^p([0, T], E)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_E^p dt \right)^{1/p}$ si $p \in [1, \infty[$.

Pq : dans le cas où X est réflexif et séparable, en général "tout se passe bien".

• Pour $u \in L^1([0, T]; X)$, on dit que u admet $v \in L^1([0, T]; X)$ pour dérivée faible si $\forall \varphi \in C_c^\infty([0, T])$, $\int_0^T \varphi'(t) u(t) dt = - \int_0^T \varphi(t) v(t) dt$ et alors on note $v = \frac{du}{dt}$.

On peut également définir $W^{1,p}([0, T]; E)$ comme l'espace des fonctions $u \in L^p([0, T]; E)$ t.q. $\frac{du}{dt} \in L^p([0, T]; E)$ et $\|u\|_{W^{1,p}} = \left(\|u\|_p^p + \left\| \frac{du}{dt} \right\|_p^p \right)^{1/p}$

Rq : il aurait pu paraître plus naturel de prendre des fonctions test $\varphi \in C_c^\infty([0, T]; E')$ mais grâce aux prop. de l'intégrale de Bochner, il suffit de prendre des fcts tests scalaires.

Def : On dit qu'une fonction

$$u \in L^2([0, T], H_0^1(\Omega)) \text{ } \hookrightarrow \text{ } \frac{du}{dt} \in L^2([0, T], H^{-1}(\Omega))$$

est solution faible du pb parabolique $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{L}_t u = f \text{ sur } [0, T] \times \Omega \\ u = 0 \text{ sur } [0, T] \times \partial\Omega \\ u|_{t=0} = u_0 \text{ sur } \Omega \end{array} \right.$

$$\text{si } \left\{ \begin{array}{l} \bullet \quad \left\langle \frac{du}{dt}, \varphi \right\rangle_{H^{-1} \times H_0^1} + B_t(u, \varphi) = \langle f, \varphi \rangle_{L^2} \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \\ \text{pour presque tout } t \in [0, T]. \end{array} \right.$$

$\bullet \quad u(0) = u_0$, ce qui a du sens grâce au lemme suivant :

Lemme : si $u \in L^2([0, T], H_0^1(\Omega))$ et $\frac{du}{dt} \in L^2([0, T], H^{-1}(\Omega))$

[LIONS
MAGENES] alors $u \in C^0([0, T], L^2(\Omega))$

[cf TD 6]

Th (Existence)

Avec les hypothèses et définitions précédentes,
il existe une unique solution faible

$$u \in L^2([0, T], H_0^1) \text{ et } \frac{du}{dt} \in L^2([0, T], H^{-1})$$

$$\text{au pb } \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \mathcal{L}_t u = f & \text{sur } [0, T] \times \Omega \\ u = 0 & \text{sur } [0, T] \times \partial\Omega \\ u|_{t=0} = u_0 & \text{sur } \Omega \end{cases}$$

Preuves:

Méthode 1: on suppose que $\mathcal{L}$ ne dépend pas de t , est auto-adjoint
(i.e. A symétrique et $b \equiv 0$) et $c \geq 0$: $\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(A \cdot \nabla u) + cu = f$
(c'est le cas de l'éq. de la chaleur)

On va utiliser l'idée du chapitre I où on a utilisé les séries
de Fourier (pour résoudre $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f$ sur $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$)

On a vu (au chap III avec Lax-Milgram) qu'on pouvait bien définir

$$\mathcal{L}^{-1}: L^2(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$$

$$f \mapsto u \text{ l'unique solution de } \begin{cases} \mathcal{L}u = f & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

et $\mathcal{L}^{-1}$ est un opérateur compact de $L^2(\Omega)$ par le th. de Rellich.

Donc par le th de diagonalisation des opérateurs auto-adjoints compacts (sur l'espace $L^2(\Omega)$ qui est un Hilbert séparable)

[il existe (μ_n) suite de réels positifs qui tend vers 0
et (e_n) base hilbertienne de $L^2(\Omega)$ t]

$$\underbrace{\mathcal{L}^{-1}}_{\in H_0^1} e_n = \underbrace{\mu_n}_{>0} e_n \text{ donc en posant } \lambda_n = \mu_n^{-1} \text{ on a}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} \mathcal{L} e_n = \lambda_n e_n & (\text{ceci est au sens faible, mais} \\ e_n \in H_0^1(\Omega) & \text{si les coeffs de } \mathcal{L} \text{ sont } C^\infty(\Omega) \\ \int_\Omega e_n^2 = 1 & \text{donc } e_n \in C^\infty(\Omega) \end{cases}$$

On cherche une solution $u(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n(t) e_n$

qui doit satisfaire $\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n'(t) e_n + \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n c_n(t) e_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle f(t), e_n \rangle e_n$

$$\text{i.e. } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} c_n'(t) + \lambda_n c_n(t) = \langle f(t), e_n \rangle \\ c_n(0) = \langle u_0, e_n \rangle \end{cases}$$

$$\text{i.e. } \forall n \in \mathbb{N}, c_n(t) = e^{-\lambda_n t} \langle u_0, e_n \rangle + \int_0^t e^{-\lambda_n(t-s)} \langle f(s), e_n \rangle ds$$

$$\text{i.e. } u(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left[e^{-\lambda_n t} \langle u_0, e_n \rangle + \int_0^t e^{-\lambda_n(t-s)} \langle f(s), e_n \rangle ds \right] e_n$$

On doit montrer que cette solution est dans le bon espace:

Remarquons que si $u = \sum c_n e_n$, la norme H^1 est équivalente à

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n |c_n|^2 : \text{ en effet } \alpha \|u\|_{H^1}^2 \leq a(u, u) \leq C \|u\|_{H^1}^2$$

$\int A \nabla u \cdot \nabla u + cu^2$

et $a(e_i, \varphi) = \lambda_i \int e_i \varphi \quad \forall i \quad \forall \varphi \in H_0^1$ donne

$$a(e_i, e_i) = \lambda_i \quad \text{et} \quad a(e_i, e_j) = 0 \quad \forall i \neq j$$

$$\text{donc } a(u, u) = \sum |c_n|^2 a(e_n, e_n) = \sum \lambda_n |c_n|^2.$$

$$\begin{aligned} \text{donc } \alpha \int_0^T \|u(t)\|_{H^1}^2 &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n \int_0^T |c(t)|^2 \quad \text{où } c(t) = e^{-\lambda_n t} \langle u_0, e_n \rangle \\ &\quad + \int_0^t e^{-\lambda_n(t-s)} \langle f(s), e_n \rangle ds \\ &\leq 2 \left(\sum_n \lambda_n |e^{-\lambda_n t}|^2 |\langle u_0, e_n \rangle|^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_n \lambda_n \int_0^T \left(\int_0^t e^{-2\lambda_n(t-s)} ds \right) \int_0^t |\langle f(s), e_n \rangle|^2 ds dt \right) \quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ &\leq 2 \left(\sum_n \lambda_n |\langle u_0, e_n \rangle|^2 + \frac{1}{2\lambda_n} \sum_n T \int_0^T |\langle f(s), e_n \rangle|^2 ds \right) \\ &\leq 2 \|u_0\|_{H^1}^2 + 2T \underbrace{\int_0^T \|f(s)\|_2^2}_{< \infty} < \infty \quad \text{car } u_0 \in H^1 \end{aligned}$$

et par suite

$$\frac{du}{dt} = -\mathcal{L}u(t) + f(t) \in H^{-1}$$

$$\text{et } f \in L^2([0, T], L^2(\Omega))$$

" $L^2([0, T] \times \Omega)$

$$\text{et } \left\| \frac{du}{dt}(t) \right\|_{H^{-1}} \leq \|u(t)\|_{H^1} + \|f(t)\|_{L^2} \quad \text{donc}$$

$$\int_0^T \left\| \frac{du}{dt} \right\|_{H^{-1}}^2 \leq 2 \left(\int_0^T \|u(t)\|_{H^1}^2 + \|f\|_{L^2([0,T] \times \Omega)}^2 \right) < \infty$$

$$\text{donc } \frac{du}{dt} \in L^2([0,T]; H^{-1})$$

Moralement on a pu définir

$e^{-t\mathcal{L}} : u \mapsto \sum_n e^{-\lambda_n t} \langle u, e_n \rangle e_n$ lorsque $\mathcal{L}$ est diagonalisable en base orthonormée, ce qui a permis de résoudre

$$\frac{du}{dt} = -\mathcal{L}u \quad (\text{sol } e^{-t\mathcal{L}} u_0)$$

et $\frac{du}{dt} = -\mathcal{L}u + f$ par la formule de Duhamel.

Méthode 2 : par les méthodes de semi-groupe :

On va supposer à nouveau $\mathcal{L}$ indépendant du temps, mais plus forcément auto-adjoint

Interlude : X un espace de Banach :

On appelle opérateur linéaire non borné de X une application linéaire $A : D(A) \rightarrow X$ où $D(A)$ est un s.e.v. de X .

On cherche à résoudre une équ. diff de la forme

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = Au(t), & t \geq 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Imaginons que la solution $u : [0, \infty[\rightarrow X$ existe et est unique, et on l'écrit $u(t) = S(t)u_0$.

Quelles sont les propriétés de $(S(t))_{t \geq 0}$?

- $S(t) : X \rightarrow X$ est linéaire.
- $S(0) = \text{Id}$
- $S(t+s) = S(t) \circ S(s) = S(s) \circ S(t)$ si $t, s \geq 0$.

On suppose de plus

- $\forall u_0 \in X, \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ est C^0 .
 $t \mapsto S(t)u_0$

différent du cas
de Cauchy-Lipschitz
qui autorise $t, s \leq 0$.

(ce qui équivaut à $S(t)u_0 \xrightarrow[t \rightarrow 0]{X} u_0$ grâce aux prop. précédentes.)

On appelle $(S(t))_{t \geq 0}$ qui satisfait ces hypothèses
un semi-groupe

et on dit que c'est un semi-groupe de contraction si:

$$\forall t \geq 0, \|S(t)\| \leq 1.$$

norme d'opérateur de $\mathcal{L}(X)$.

Réciproquement, étant donné un semi-groupe $(S(t))_{t \geq 0}$, on cherche à retrouver A :

Pour un semi-groupe $(S(t))_{t \geq 0}$, on pose

$$D(A) = \left\{ u \in X, \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)u - u}{t} \text{ existe dans } X \right\}$$

et $\forall u \in D(A), Au := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)u - u}{t}$ qui appelle générateur

On a facilement : • $\forall u \in D(A), S(t)u \in D(A)$

(cf EVANS p 435 pour les détails)

$$AS(t)u = S(t)Au$$

$t \mapsto S(t)u$ est dérivable et $\frac{d}{dt} S(t)u = A[S(t)u]$ et en fait C^1

• $D(A)$ est dense : en effet $\underbrace{\frac{1}{t} \int_0^t S(s)u ds}_{u^t \in D(A)} \xrightarrow{t \rightarrow 0} u \quad \forall u \in X$

$$\begin{aligned} \frac{S(r)u^t - u^t}{r} &= \frac{1}{r} \int_0^t S(s+r)u - S(s)u ds \\ &= \frac{1}{r} \left(\int_r^{r+t} S(s)u - \int_0^t S(s)u ds \right) \\ &= \frac{1}{r} \left(\int_t^{t+r} S(s)u - \int_0^r S(s)u ds \right) \\ &\xrightarrow{r \rightarrow 0} S(t)u - u \end{aligned}$$

• A est fermé i.e. pour toute suite $(u_n) \in D(A)$ $u_n \rightarrow u$
 $Au_n \rightarrow v$

Alors $u \in D(A)$ et $v = Au$.

en effet $S(t)u_n - u_n = \int_0^t S(s)Au_n ds$ (version intégrale de l'EDO)

passé à la limite donc $S(t)u - u = \int_0^t S(s)v ds$

$$\text{d'où } \frac{S(t)u - u}{t} = \frac{1}{t} \int_0^t S(s)v ds \xrightarrow{t \rightarrow 0} v \quad \text{d'où le résultat.}$$

Enfin, pour A un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A)$,

• On dit que $\lambda \in \rho(A)$ l'ensemble résolvant de A complémentaire du spectre.
si $\lambda \text{Id} - A : D(A) \rightarrow X$ est bijectif

et donc on pose $R_\lambda : X \rightarrow X$

la résolvante

$$u \mapsto (\lambda I - A)^{-1} u$$

Rq: Par le th du graphe fermé, $R_\lambda : X \rightarrow D(A) \subset X$ est borné.

Exemple typique $X = L^2(0,1)$, $A = \frac{d}{dx}$, $D(A) = \{u \in H^1(0,1), u(0) = 0\}$

A est fermé car si $(u_n) \in D(A)^N$ et $u_n \xrightarrow{L^2} u$, $u_n' \xrightarrow{L^2} v$ alors $v = u' \in L^2$
et $u_n \xrightarrow{H^1} u$ donc C^0 donc $u(0) = 0$ et $u \in D(A)$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda I - A : H^1 \rightarrow L^2$ est un opérateur non borné de L^2 .

mais il est bijectif (l'EDO $\begin{cases} -u' + \lambda u = f \\ u(0) = 0 \end{cases}$ a une unique solution)

et $(\lambda I - A)^{-1} : L^2 \rightarrow H^1 \subset L^2$ est continu
 $f \mapsto u$ l'unique sol de $\begin{cases} -u' + \lambda u = f \\ u(0) = 0 \end{cases}$

• Dans le cas de notre semi-groupe de contractions $(S(t))_{t \geq 0}$ et de son générateur A ,

on a $\forall \lambda \in]0, +\infty[$, $\lambda \in \rho(A)$

transformée de Laplace

$$R_\lambda u = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) dt \text{ et en particulier } \|R_\lambda\| \leq \frac{1}{\lambda}$$

En effet comme $\|S(t)\| \leq 1$, $\int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) dt$ est bien défini ($\lambda > 0$!)

en notant $\tilde{R}_\lambda$ cette intégrale, on a $\forall u \in D(A)$

$$\frac{S(h) \tilde{R}_\lambda u - \tilde{R}_\lambda u}{h} = -\frac{1}{h} \int_0^h e^{-\lambda(t-h)} S(t) u dt + \frac{1}{h} \int_0^\infty (e^{-\lambda(t-h)} - e^{-\lambda t}) S(t) u dt$$

$$\xrightarrow{h \rightarrow 0} -u + \lambda \tilde{R}_\lambda u \text{ donc } (\lambda I - A) \tilde{R}_\lambda u = u.$$

et parce que A est fermé, $A \tilde{R}_\lambda u = A \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) u dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} A S(t) u dt = \tilde{R}_\lambda A u$

donc finalement $(\lambda I - A) \tilde{R}_\lambda = \tilde{R}_\lambda (\lambda I - A) = I$ donc $\lambda I - A$ bij et $(\lambda I - A)^{-1} = \tilde{R}_\lambda$.

On en arrive au th. central de Hille-Yosida :

on a ou que si $(S(t))$ est un semi-groupe de contractions alors

$$\begin{cases} \mathcal{D}(A) \text{ est dense} \\ A \text{ est fermé} \\ (0, +\infty) \subset \rho(A) \\ \forall \lambda \in]0, +\infty[, \|R_\lambda\| \leq \frac{1}{\lambda} \end{cases}$$

Th de Hille Yosida :

Soit A un opérateur fermé et défini sur un ensemble dense de X .

Alors A est le générateur d'un semi-groupe de contractions

$$\Leftrightarrow (0, \infty) \subset \rho(A) \text{ et } \forall \lambda \in]0, \infty[, \|R_\lambda\| \leq \frac{1}{\lambda}$$

(voir Evans pour le sens $\Leftarrow$)

Corollaire : Soit $\omega \in \mathbb{R}$: A opérateur fermé et défini sur un ensemble dense.

Alors A génère un semi-groupe " ω -contractant" $(S(t))$ i.e. $\|S(t)\| \leq e^{\omega t} \forall t \geq 0$

$$\Leftrightarrow (\omega, \infty) \subset \rho(A) \text{ et } \forall \lambda \in]\omega, +\infty[, \|R_\lambda\| \leq \frac{1}{\lambda - \omega}$$

Preuve : On applique le th. de Hille-Yosida à A

$\Rightarrow$ si A génère un semi-groupe ω -contractant $(S(t))$ alors

$(e^{-\omega t} S(t))$ est un semi-groupe de contractions et son générateur

$$\text{est } \frac{e^{-\omega t} S(t)u - u}{t} = e^{-\omega t} \frac{S(t)u - u}{t} + \frac{e^{-\omega t} u - u}{t} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} Au - \omega u$$

donc par le th de Hille-Yosida ($\Rightarrow$)

$$(0, \infty) \subset \rho(A - \omega I) \text{ et } \|[2I - (A - \omega I)]^{-1}\| \leq \frac{1}{2}, \forall \lambda > 0$$

i.e $(\omega, \infty) \subset \rho(A)$ et $\|(\mu I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\mu - \omega} \forall \mu > \omega.$

$$\Leftrightarrow \text{si } (\omega, \infty) \subset \rho(A) \text{ et } \forall \lambda > \omega, \|(2I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda - \omega}$$

$$\text{Alors } (0, \infty) \subset \rho(A - \omega I) \text{ et } \forall \mu > 0, \|(\mu I - (A - \omega I))^{-1}\| \leq \frac{1}{\mu}$$

donc par le th de Hille-Yosida ($\Leftarrow$) $(A - \omega I)$ génère un semi-groupe de contractions $(T(t))_{t \geq 0}$ et donc on peut poser $S(t) = e^{\omega t} T(t)$ qui est bien ω -contractant et

$$\text{Son générateur est } \frac{e^{\omega t} T(t)u - u}{t} = e^{\omega t} \frac{T(t)u - u}{t} + \frac{e^{\omega t} - 1}{t} u$$

$$\xrightarrow{t \rightarrow 0} (A - \omega I)u + \omega u = Au$$

□

Application du théorème pour résoudre

où on suppose Ω borné et régulier.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -\mathcal{L}u & \text{sur } [0, T] \times \Omega \\ u = 0 & \text{sur } [0, T] \times \partial\Omega \\ u(0) = u_0 & \text{sur } \Omega \end{cases}$$

$$\text{Ici on a } X = L^2(\Omega), \quad D(A) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$$

$$\text{et } A : u \mapsto -\mathcal{L}u = \operatorname{div}(A \nabla u) - b \cdot \nabla u - cu.$$

On a vu au chapitre III qu'il existe $\gamma \geq 0$ et $\beta > 0$ t.q

$$B(u, u) + \gamma \|u\|_2^2 \geq \beta \|u\|_{H_0^1}^2$$

$$\int A \nabla u \cdot \nabla u + (b \cdot \nabla u)u + cu (= (\mathcal{L}u, u))$$

et par le th. de Hille-Yosida, A génère un semi-groupe γ -contractant sur $L^2(\Omega)$: en effet le th. s'applique car :

- $D(A)$ est dense

- A est fermé : si $(u_n) \in D(A)^N$ et $u_n \xrightarrow{L^2} u$
 $Au_n \xrightarrow{L^2} f$

Alors par les th. de régularité elliptique (jusqu'au bord)

$$\|u_n - u\|_{H^2} \leq C (\|Au_n - Au\|_{L^2} + \|u_n - u\|_{L^2})$$

donc (u_n) est de Cauchy dans H^2 et donc $u_n \xrightarrow{H^2} u$

d'où $u \in D(A)$ et $Au_n \rightarrow Au$, d'où $Au = f$.

- pour $\lambda \geq \gamma$, le pb $\begin{cases} \lambda u + \mathcal{L}u = f & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$

admet une unique sol. faible pour tout $f \in L^2(\Omega)$, et par régularité elliptique, $u \in H^2(\Omega) (\cap H_0^1(\Omega))$ donc

pour tout $f \in L^2(\Omega)$, $\exists! u \in D(A)$ t. $(\lambda I - A)u = f$

d'où $[\gamma, \infty[\subset \rho(A)$.

- Enfin, avec les notations précédentes, pour $\lambda \geq \gamma$, $f \in L^2$,

$$u = R_2 f \text{ vérifie } \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), B(u, \varphi) + \lambda \langle u, \varphi \rangle_{L^2} = \langle f, \varphi \rangle_{L^2}$$

$$\text{donc avec } \varphi = u \text{ on a } (1 - \gamma) \|u\|_{L^2}^2 \leq \|f\|_{L^2} \cdot \|u\|_{L^2}$$

$$\text{d'où } \|R_2 f\|_{L^2} \leq \frac{1}{1 - \gamma} \|f\|_{L^2} \text{ i.e. } \|R_2\| \leq \frac{1}{1 - \gamma} \quad \square$$

Méthode 3

On traite le cas général (λ dépend de t)

par la méthode Galerkin qui généralise la méthode 1:

Il existe $(w_h)_{h \geq 1} \in H_0^1(\Omega)^N$ qui est une base orthonormée de L^2 telle que
 $\forall h, (w_h)_{h \geq 1}$ est orthogonale dans $H_0^1(\Omega)$.

(par exemple prendre (w_h) la base de diagonalisation de $(-\Delta)$
 cf méthode 1 ci-dessus)

Stratégie :

$$\bullet \text{ On cherche } u_m(t) := \sum_{h=1}^m d_m^h(t) w_h \in H_0^1(\Omega)$$

$$\text{de sorte que } \left\langle \frac{du_m}{dt}, w_h \right\rangle + B_f[u_m, w_h] = \langle f, w_h \rangle \quad \forall h \in \llbracket 1, m \rrbracket$$

$$d_m^h(0) = \langle g, w_h \rangle \quad \forall h \in \llbracket 1, m \rrbracket.$$

(on voit en regardant les EDO satisfaites par les (d_m^h) que pour chaque m
 (u_m) existe et est unique)

- Estimation d'énergie :

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|u_m(t)\|_2 + \|u_m\|_{L^2([0, T]; H_0^1)} + \left\| \frac{du_m}{dt} \right\|_{L^2([0, T]; H^{-1})} \leq C \left[\|f\|_{L^2([0, T]; L^2)} + \|u_0\|_{L^2} \right]$$

(On utilise (u_m) comme fonction test puis on utilise le lemme de Gronwall et le fait qu'on projette sur H_0^1 , cf EVANS p.376)

- On utilise la compacité faible: à extraction près,

$$u_m \rightharpoonup u \text{ faible } L^2([0, T], H_0^1)$$

$$\text{et } \frac{du_m}{dt} \rightharpoonup \frac{du}{dt} \text{ faible } L^2([0, T], H^{-1})$$

et on passe à la limite dans la formulation intégrale $\leadsto$ existence.

- L'unicité se prouve à part facilement en utilisant $\varphi = u$ comme fonction test dans la formulation faible.

Commentaires

- On peut prouver plus de régularité:

avec seulement $f \in L^2$ et $u_0 \in H_0^1$, on a en fait

$$u \in L^2([0, T]; H^2) \cap L^\infty([0, T]; H_0^1) \text{ et } \frac{du}{dt} \in L^2([0, T]; L^2)$$

Pour avoir plus de régularité jusqu'en $t=0$, il faut ajouter des "conditions de compatibilité" pour assurer $\frac{\partial^j u}{\partial t^j} = 0$ sur $\partial\Omega$

- On peut généraliser le principe du maximum parabolique vu au chapitre I pour l'équation de la chaleur, pour $c=0$ ou $c \geq 0$ et même si c est seulement bornée (sans signe)

- On peut également résoudre, avec les mêmes outils,

→ l'équation des ondes

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \mathcal{L}u = f & \text{sur } [0, T] \times \Omega \\ u = 0 & \text{sur } [0, T] \times \partial\Omega \\ u|_{t=0} = u_0, \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = u_1 & \text{sur } \Omega \end{cases}$$

avec une solution faible $u \in L^2([0, T]; H_0^1)$ $\hookrightarrow$

$$\frac{du}{dt} \in L^2([0, T]; L^2) \text{ et } \frac{d^2 u}{dt^2} \in L^2([0, T]; H^{-1})$$

cf EVANS § 7

II) Equations d'évolution non linéaire.

On évoque seulement quelques exemples:

- Equation de réaction diffusion: $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(u)$

Si f est Lipschitzienne, on peut définir comme avant une notion de solution faible car f est sous-linéaire donc $f(u) \in L^2$.

et on peut montrer qu'il existe une unique solution faible

avec le th du point fixe de Picard: ça marche pour T petit

indépendant de u_0 donc on peut itérer et avoir existence pour tout $t \in [0, T]$

(cf EVANS p 535)

- Comme pour les EDO, il peut y avoir non-existence en temps long:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = u^2 \quad (\text{EVANS p 547})$$

et on peut parler d'explosion.

CHAPITRE 5

Introduction à l'analyse Micro-locale

Dans ce dernier chapitre, on amorce une approche plus "systématique" des EDP, via le langage des distributions.

On paiera un prix à ce degré de généralité, en supposant

- l'EDP est linéaire
- et posée sur $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ (pas de condition de bord, mais éventuellement une condition initiale).

i.e.
$$\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial^\alpha u(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

noté $P(x, \partial)u = f$ où $P(x, \partial) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial^\alpha$

ou
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + P(x, \partial)u = f & (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \\ u|_{t=0} = u_0 & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

On parlera d'EDP linéaire à coefficients constants si les $(a_\alpha)_{|\alpha| \leq m}$ ne dépendent pas de x , et on note alors $P(\partial)$ au lieu de $P(x, \partial)$

RÉF: HORMANDER, The Analysis of Linear Partial Differential Operators. 4 volumes!

ALINHAC - GERARD, Opérateurs Pseudo-Diff et Th. de Nash-Moser

ALAZARD, $\left\{ \begin{array}{l} \text{Analyse et Équations aux Dérivées Partielles} \\ \& \\ \text{Introduction to Microlocal analysis} \end{array} \right.$ (Polycopiés dispo. en ligne)

INTERLUDE 1

Rapports rapide sur les distributions.

Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$

On pose $\mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega) = \left\{ \varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{K} \mid \varphi \text{ est } C^\infty \text{ et } \begin{array}{l} \text{supp } \varphi \text{ est compact dans } \Omega \\ \text{i.e. il existe } K \text{ compact } \subset \Omega \\ \text{t.q. } \varphi = 0 \text{ sur } \Omega \setminus K. \end{array} \right\}$

Une distribution sur Ω est une forme linéaire $T: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{K}$
 $\varphi \mapsto \langle T, \varphi \rangle$
qui satisfait :

$\forall K \text{ compact } \subset \Omega, \exists C_K \in \mathbb{R}_+, \exists m_K \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \text{ t.q. } \text{supp } \varphi \subset K,$

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C_K \max_{|\alpha| \leq m_K} \|D^\alpha \varphi\|_\infty$$

Rq : • On ne parle volontairement pas de topologie ici, car l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ ne rentre pas dans un cadre très classique. On a en fait

$$\mathcal{D}(\Omega) = \bigcup_{\substack{K \text{ compact} \\ K \subset \Omega}} \mathcal{D}_K(\Omega)$$

$\uparrow$ fonctions C^∞ dont le support est inclus dans K

qui est une limite inductive d'espaces de Fréchet, et
 $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ssi pour tout K , la restriction de T à $\mathcal{D}_K(\Omega)$ est continue.

($\mathcal{D}_K(\Omega)$ est un espace de Fréchet pour la famille de semi-norme
 $(\varphi \mapsto \|D^\alpha \varphi\|_\infty)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$)

- Si on peut choisir m_K indépendant de K on dit que $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est d'ordre fini, et le plus petit m_0 possible est appelé ordre de T . Dans ce cas T peut être prolongé par continuité à $C_c^{m_0}(\Omega)$.

Exemple fondamental : $\bullet L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$

Si $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, on définit $[f]: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{K}$

$$\varphi \mapsto \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx$$

et comme pour tout K compact et tout $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$,

$\int_K |f\varphi| \leq \|\varphi\|_{\infty} \cdot \int_K |f|$, T est bien définie et linéaire et $\forall K$ compact, $|\langle T, \varphi \rangle| \leq \left(\int_K |f| \right) \|\varphi\|_{\infty}$ donc $[f]$ est une distribution d'ordre 0. (en pratique on confondra $[f]$ et f)

- Autre exemple : pour $x_0 \in \Omega$,

$\delta_{x_0}: \varphi \mapsto \varphi(x_0)$ est aussi une distribution d'ordre 0.

(en fait pour tout μ mesure de Radon sur Ω (i.e. borélienne et finie sur les compacts de Ω), l'application $[\mu]: \varphi \mapsto \int \varphi d\mu$ est une distribution d'ordre 0)

Opérations sur $\mathcal{D}'(\Omega)$:

- $\mathcal{D}'(\Omega)$ est un e.v.

- On définit $T_m \xrightarrow{\mathcal{D}} T$ ssi $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \langle T_m, \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle$

- Multiplication par une fonction C^∞ : si $\theta \in C^\infty(\Omega)$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$

on pose $\langle \theta T, \varphi \rangle = \langle T, \theta \varphi \rangle$ et alors $\theta T \in \mathcal{D}'(\Omega)$

(cette définition est "légitime" car si $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, $[\theta f] = \theta[f]$)

(Attention on peut avoir $\theta T = 0$ avec $\theta \neq 0$ et $T \neq 0$,
par exemple $m \delta_0 = 0$ où $m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x$.)

- Dérivation au sens des distributions: si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$

on pose $\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle$ et alors $\partial^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

(cette définition est "légitime" car si $f \in C^k(\Omega)$ alors $\forall |\alpha| \leq k$,
 $\partial^\alpha[f] = [\partial^\alpha f]$)

Si T est d'ordre m_0 alors $\partial^\alpha T$ est d'ordre au plus $m_0 + |\alpha|$.

- Support d'une distribution: si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, on peut définir:

$$\text{Supp } T = \Omega \setminus \left(\bigcup_{\substack{\omega \text{ ouvert } \subset \Omega \\ \forall \gamma \ T|_\omega = 0}} \omega \right) \text{ et c'est un fermé de } \Omega.$$

Si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est à support compact dans Ω , alors T est d'ordre fini et peut être prolongée en une forme linéaire continue sur $\mathcal{E}(\Omega) := C^\infty(\Omega)$ et on note alors $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$

Distributions tempérées et transformation de Fourier.

$x_1^{\alpha_1} \dots x_m^{\alpha_m}$

- On pose $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m) = \{ \varphi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{K} \text{ de classe } C^\infty \text{ et } \}$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^m, x^\alpha \partial^\beta \varphi \in L^\infty \{$$

muni des semi-normes $p_{\alpha\beta}(\varphi) = \sup_{x \in \mathbb{R}^m} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)|$

qu'on appelle espace de Schwartz (des fonctions à décroissance rapide)

- On dit que T est une distribution tempérée si T est une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ i.e. $T: \mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{K}$ est linéaire et satisfait: $\exists p_0, m_0 \in \mathbb{N}^2, \exists C \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$,

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \max_{\substack{|\alpha| \leq p_0 \\ |\beta| \leq m_0}} \|x^\alpha \partial^\beta \varphi\|_\infty (*)$$

et on note alors $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$

Rq: On a $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ (en considérant la restriction à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$)

et si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ satisfait (*) pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, alors on peut prolonger T par continuité à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ et alors $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$.

Autrement dit, l'espace de départ sur lequel est défini T n'est pas important, ce qui compte c'est la condition de continuité, celle des distributions tempérées étant plus forte que celle des distributions.

- Pour $u \in L^1(\mathbb{R}^m)$, on a posé (cf Chap I) (ici naturellement on prend $K = \mathbb{C}$)

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^m, \mathcal{F}u(\xi) = \hat{u}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int_{\mathbb{R}^m} u(x) e^{-i\xi \cdot x} dx$$

- On peut vérifier que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ est stable par $\mathcal{F}$, et même que $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ est une bijection continue.

- Pour $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$, on peut poser

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m), \langle \hat{T}, \varphi \rangle := \langle T, \hat{\varphi} \rangle \text{ et alors } \hat{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$$

(cette définition est "légitime" car si $f \in L^1(\mathbb{R}^m)$, $\widehat{[f]} = [\hat{f}]$)

On a $\forall p \in [1, +\infty], L^p(\mathbb{R}^m) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$
mais on n'a plus $L^1_{loc}(\mathbb{R}^m) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$

- $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ est une bijection et

$$\mathcal{F}^{-1}(u) = \overline{\mathcal{F}(\bar{u})}$$

- Comment "commuter" ∂^α et $\mathcal{F}$?

On a les formules (valables dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ donc dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$):

$$\forall T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m), \forall \alpha \in \mathbb{N}^m, \widehat{\partial^\alpha T} = (i^{|\alpha|} \xi^\alpha) \hat{T}$$

$$\partial^\alpha \hat{T} = (-i)^{|\alpha|} \widehat{\xi^\alpha T}$$

et donc plus généralement $\widehat{\sum a_\alpha \partial^\alpha T} = \sum \underbrace{a_\alpha (i\xi)^\alpha}_{\text{noté } p(\xi) \text{ et appelé symbole}} \hat{T}$

I) Solution fondamentale.

Déf : Si $P(D)$ est un opérateur différentiel à coefficients constants
on dit que $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est une solution fondamentale si
$$P(D)E = \delta_0$$

Importance : Ainsi si E est une solution fondamentale, alors pour tout

$f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $u := E * f$ est solution de $P(D)u = f$

car $P(D)u = P(D)[E * f] = [P(D)(E)] * f = \delta_0 * f = f$
→ en fait valable si $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$

Interlude convolution : il y a deux idées "successives" pour définir la convolution des distributions :

① Convolution d'une distribution et d'une fonction :
si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, on pose
$$\forall x \in \mathbb{R}^n, T * \varphi(x) = \langle T, \varphi(x - \cdot) \rangle$$

Fonctionne aussi si
 $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

et alors $T * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \partial^\alpha (T * \varphi) = (\partial^\alpha T) * \varphi = T * (\partial^\alpha \varphi)$

Cela permet entre autre de régulariser une distribution, en prenant
 $\varphi = \rho_\epsilon$ où (ρ_ϵ) est une famille régularisante)

② Convolution d'une distribution et d'une distribution à support compact :

si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, on pose

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \langle T * S, \varphi \rangle = \langle T, \check{S} * \varphi \rangle$$

def en ①

où $\check{S}$ est la distribution définie par $\langle \check{S}, \varphi \rangle = \langle S, \check{\varphi} \rangle$
et $\check{\varphi}(x) = \varphi(-x)$

et alors $T * S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

Cette définition vient de l'observation :

$$\begin{aligned} \langle [f * g], \varphi \rangle &= \int f * g(x) \varphi(x) dx = \iint f(y) g(x-y) \varphi(x) dx dy \\ &= \int f(y) \left(\int \check{g}(y-x) \varphi(x) dx \right) dy = \langle [f], \check{g} * \varphi \rangle \end{aligned}$$

Exemple : si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ alors $T * \delta_0 = T$:

$$\langle T * \delta_0, \varphi \rangle = \langle T, \check{\delta}_0 * \varphi \rangle = \langle T, \delta_0 * \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$$

$$\text{car } \delta_0 * \varphi(x) = \langle \delta_0, \varphi(x - \cdot) \rangle = \varphi(x) \quad \forall x.$$

De plus on a $\partial^\alpha (T * S) = \partial^\alpha T * S = T * \partial^\alpha S$.

Exemples de solutions fondamentales :

- On peut reformuler le résultat du chapitre I sur la solution fondamentale de $-\Delta$: si $\Phi(x) =$

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} |x| & \text{si } N=1 \\ -\frac{1}{2\pi} \ln|x| & \text{si } N=2 \\ \frac{1}{N(N-2)\omega_N} \frac{1}{|x|^{N-2}} & \text{si } N \geq 3 \end{cases} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$$

alors $-\Delta \Phi = \delta_0$.

- De même, si $\Phi(t, x) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & \text{si } t > 0, x \in \mathbb{R}^N \\ 0 & \text{si } t \leq 0, x \in \mathbb{R}^N \end{cases} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$

alors $\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x\right)\Phi = \delta_{(0,0)}$

I.1) Régularité.

Déf : Si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, on appelle support singulier de T l'ensemble des $x \in \Omega$ tels qu'il n'existe pas de voisinage ouvert de x sur lequel T est égal à une fonction C^∞ . On le note $\text{Supp sing } T$.

Rq : $\text{Supp sing } T$ est un fermé de Ω .

Lemme : Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ alors

$$\text{Supp sing } T * S \subset \text{Supp sing } T + \text{Supp sing } S.$$

Preuve: Il existe $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ $\chi=1$ sur $\text{supp} \text{sing } S$. (car il est compact)

$$\text{Alors } S = \chi S + (1-\chi)S$$

avec $(1-\chi)S \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ donc $T * (1-\chi)S \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

et $T * (\chi S)(x) = \langle T, \chi S(x-\cdot) \rangle$ si x est tel que

$x - \text{supp} \chi S \subset (\text{supp} \text{sing } T)^c$ et dans ce cas $T * (\chi S)$ est C^∞ au voisinage de x . Ainsi

$$\text{supp} \text{sing } T * S = \text{supp} \text{sing } T * \chi S \subset \text{supp} \text{sing } T + \text{supp } \chi S$$

mais on peut choisir χ de sorte que $\text{supp } \chi S \subset \text{supp } \chi$ soit aussi proche que souhaité de $\text{supp} \text{sing } S$ d'où le résultat $\square$

Th: Soit $P(\partial)$ un opérateur différentiel à coefficients constants.

On suppose qu'il existe une solution fondamentale $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

telle que $\text{supp} \text{sing } E = \{0\}$. Alors

pour tout Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\text{supp} \text{sing } u = \text{supp} \text{sing } P(\partial)u \quad \forall u \in \mathcal{D}'(\Omega)$

Rq: • en particulier, sous ces hypothèses on a

$$P(\partial)u = f \in C^\infty(\Omega) \Rightarrow u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega).$$

Un opérateur vérifiant cette propriété est dit *hyperelliptique* (c'est équivalent et le th. précédent montre :

$$\text{à } \text{supp} \text{sing } u = \text{supp} \text{sing } P(\partial)u)$$

Il existe E sol fondamentale $\Leftrightarrow \text{supp} E = \{0\} \Rightarrow P(\partial)$ hypoelliptique.

(il y a en fait équivalence, une fois qu'on sait qu'il existe toujours une solution fondamentale, cf plus loin).

- L'inclusion $\text{supp} P(\partial)u \subset \text{supp} u$ est toujours vraie (là où u est C^∞ , $P(\partial)u$ aussi).

Preuve: • On suppose d'abord $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Alors

$$(P(\partial)u) * E = (P(\partial)E) * u = \delta_0 * u = u$$

donc $\text{supp} u \subset \text{supp} P(\partial)u + \text{supp} E = \text{supp} P(\partial)u$.

- Si maintenant $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, pour tout ouvert $\Omega' \Subset \Omega$ on introduit $\chi \in \mathcal{D}(\Omega)$ $\chi = 1$ sur Ω' et alors

$$\begin{aligned} \Omega' \cap \text{supp} P(\partial)u &= \Omega' \cap \text{supp} P(\partial)(\chi u) = \Omega' \cap \text{supp} \chi u \\ &= \Omega' \cap \text{supp} u \end{aligned}$$

par le point précédent avec $\chi u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$
d'où le résultat □

Ex: Connaissant la solution fondamentale du Laplacien, on en déduit l'hypoellipticité du Laplacien.

On peut "affaiblir" la notion de solution fondamentale en la suivante, parfois plus facile à "trouver":

Déf: Soit $P(\partial)$ opérateur diff. linéaire à coefficients constants.
Une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est appelée paramétrice
si $P(\partial)T = \delta_0 + \omega$ où $\omega \in C^\infty$ (paramétrix)

Et on a encore

Th: Si $P(\partial)$ possède une paramétrice dont le support singulier est $\{0\}$
alors $\forall \Omega$ ouvert $\subset \mathbb{R}^n$, $\forall T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\text{support } T = \text{support } P(\partial)T$.

(Même preuve que pour le cas de la sol. fondamentale).

Une application intéressante:

Déf: Un opérateur linéaire à coefficients constants $P(\partial) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha$
est dit elliptique si son symbole principal $p_m(\xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha (i\xi)^\alpha$
ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$.

Th: Si $P(\partial)$ est elliptique, alors $P(\partial)$ est hypo-elliptique.

Idée: Si on voulait une sol. fondamentale, on devrait résoudre
 $p(\xi)\hat{u} = 1$, mais p peut s'annuler. Grâce à la latitude

donnée par la paramétrice, on va pouvoir diviser par p pour $|\xi|$ grand
seulement.

Preuve • Par hypothèse d'ellipticité, $\min_{|z|=1} |p_m(z)|$ (qui est atteint par compacité de S^{m-1}) est strictement positif, et donc il existe $\alpha > 0$ tq

$$p_m(z) \geq \alpha |z|^m \text{ et comme } p(z) - p_m(z) = o(|z|^m)_{+\infty}$$

il existe $R > 0$ et $c = \frac{\alpha}{2} > 0$ tq $\forall |z| \geq R, p(z) \geq c |z|^m$.

• Il existe $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tq $\chi = 1$ sur $B(0, R)$: on pose alors

$$f(z) = \frac{1 - \chi(z)}{p(z)} \text{ qui est bien définie (là où } p \text{ est susceptible de s'annuler, } 1 - \chi(z) = 0) \text{ et } f \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$$

• On va vérifier que $T = \mathcal{F}^{-1} \overset{\in \mathcal{S}'}{(f)}$ est la paramétrice recherchée.

$$\rightarrow P(\partial)T = p(z) \hat{T} = 1 - \chi(z) \text{ donc } P(\partial)T = \underbrace{\mathcal{F}^{-1}(1)}_{= c \delta_0} - \underbrace{\mathcal{F}^{-1}(\chi)}_{\in C^\infty \text{ car supp } \chi \text{ compact.}}$$

$\rightarrow$ Il reste à montrer que T est C^∞ en dehors de 0.

Pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on va montrer que T est C^∞ sur $\{x, x_j \neq 0\}$

pour cela, on va montrer $\forall \alpha, \exists h, x_j^h \partial^\alpha T \in C^\infty$, or

$$\widehat{x_j^h \partial^\alpha T} = i^{h+|\alpha|} \frac{\partial^h}{\partial z_j^h} \left[\frac{z_j^\alpha (1 - \chi(z))}{p(z)} \right] \text{ qu'on voudrait } L^1(\mathbb{R}^n) \text{ (pour que son Fourier soit } C^\infty)$$

Comme cette fonction est régulière, il suffit d'étudier son comportement pour $|z| > R$

où $\chi = 0$: par Leibniz, pour le grand on a des termes $z_j^\beta \frac{\partial^l}{\partial z_j^l} \left(\frac{1}{p(z)} \right)$

$$\text{avec } \beta \leq \alpha \text{ et } l \geq h - |\alpha|, \text{ or } \frac{\partial^l}{\partial z_j^l} \left(\frac{1}{p(z)} \right) = \frac{Q_l(z)}{R_l(z)} \text{ avec } \deg R_l - \deg Q_l = m + l$$

$$\widehat{x_j^h \partial^\alpha T} = O(|z|^{2|\alpha| - m - h}) \in L^1 \text{ si le grand } \uparrow \text{ puissance de } p.$$

□

I.2) Existence "locale".

Th (Hörmander - Ehrenpreis (1956))

Soit $P(\partial)$ un opérateur différentiel non nul et à coefficients constants

Alors il existe une solution fondamentale dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ i.e.

$$T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N) \text{ tq } P(\partial)(T) = \delta_0.$$

Rq : on ne peut pas espérer unicité dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ (sauf si $\deg P = 0$)

(si $T_z: x \mapsto e^{iz \cdot x}$ on a $P(\partial)(T_z) = \sum a_\alpha (iz)^\alpha T_z = p(z) T_z$ donc il suffit de choisir z_0

tq $p(z_0) = 0$ qui existe
si $\deg p \geq 1$ et alors

$T + T_{z_0}$ est solution)

HEURISTIQUE : On veut résoudre $P(\partial)(T) = \delta_0$.

On suppose $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$: alors $\sum a_\alpha \partial^\alpha T = \hat{\delta}_0$

$$\text{i.e. } \underbrace{\left[\sum a_\alpha (iz)^\alpha \right]}_{p(z)} \hat{T} = c \text{ où } c = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}}$$

noté $p(z)$ appelé symbole de $P(\partial)$

On veut prendre T tq $\hat{T} = \frac{c}{p(z)}$ mais comme p peut s'annuler, on ne sait pas en général si $\frac{c}{p}$ définit une distribution tempérée.

On détaille trois démonstrations : les deux premières par un argument de type dualité (la première utilise la th. de Hahn-Banach, la seconde, bien que similaire montre qu'on peut se "contenter" de techniques hilbertiennes, la 3^e montre l'utilisation de l'analyse complexe pour faire marcher l'heuristique précédente.

Preuve : Méthode 1 (cf CREED-SIMON Methods of Modern Mathematical Physics II:

Fourier Analysis, self-adjointness Th IX.23)

- Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et $z \in \mathbb{R}^n$. On regarde

$$z \in \mathbb{C}^n \mapsto \widehat{P^*(\partial)\varphi}(z+\zeta) = \underbrace{q(z+\zeta)}_{\text{polynôme}} \underbrace{\hat{\varphi}(z+\zeta)}_{\text{holomorphe car supp } \varphi \text{ compact.}}$$

- Lemme : On pose $Q(x) = \sum_{\alpha} |\partial^{\alpha} q(x)|$ qui est tel qu'il existe $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ t_q
 $Q(x) \geq \beta \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$. Soit $\varepsilon > 0$

preuve
+ loim

Alors il existe $C = C(\varepsilon)$ (indépendant de φ) t_q

$$\forall z, \quad |Q(z) \hat{\varphi}(z)| \leq C \int_{|\zeta| \leq \varepsilon} \underbrace{|\hat{\varphi}(z+\zeta) q(z+\zeta)|}_{P^*(\partial)\varphi(z+\zeta)} d\zeta \quad \text{mesure de Lebesgue sur } \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2.$$

- Ainsi $|\varphi(0)| \leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int |\hat{\varphi}| \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \int_{|\zeta| \leq \varepsilon} \left| \frac{\widehat{P^*(\partial)\varphi}(z+\zeta)}{Q(z)} \right| d\zeta dz$

$$\leq C \int_{\mathbb{R}^n} \int_{|\lambda|^2 + |\mu|^2 \leq \varepsilon^2} \left| \frac{\widehat{P^*(\partial)\varphi}(z+\lambda+i\mu)}{Q(z)} \right| d\lambda d\mu dz$$

$$\leq C' \int_{\mathbb{R}^n} \int_{|\lambda|^2 + |\mu|^2 \leq \varepsilon^2} \left| \frac{\widehat{P^*(\partial)\varphi}(z+\lambda+i\mu)}{Q(z+\lambda)} \right| d\lambda d\mu dz$$

$$\leq C'' \int_{\mathbb{R}^n} \int_{|\mu| \leq \varepsilon} \left| \frac{\widehat{P^*(\partial)\varphi}(z+i\mu)}{Q(z)} \right| d\mu dz$$

$\hookrightarrow \zeta = \lambda + i\mu$
 $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^n$
 $\forall |\lambda| \leq \varepsilon, \forall z$
 $\left| \frac{Q(z+\lambda)}{Q(z)} \right| \leq C$
 $\hookrightarrow$ Translation de λ
 dans l'intégrale en z
 (et $\mu, |\lambda|^2 + |\mu|^2 \leq \varepsilon^2$
 $\subset \mu, |\mu| \leq \varepsilon$)

• On pose $\|\varphi\|_Q = \int_{\mathbb{R}^m} \int_{|\mu| \leq \varepsilon} \left| \frac{\hat{\varphi}(z+i\mu)}{Q(z)} \right| d\mu dz$

→ On a $\|\varphi\|_Q \leq \frac{1}{\beta} \int_{\mathbb{R}^m} \int_{|\mu| \leq \varepsilon} |\hat{\varphi}(z+i\mu)| d\mu dz$

$\leq C \sup_{\substack{z \in \mathbb{R}^m \\ |\mu| \leq \varepsilon}} \underbrace{\left(1+|z|^2\right)^{m+1} |\hat{\varphi}(z+i\mu)|}_{\substack{\underbrace{e_\mu \varphi}_{\text{où } e_\mu: x \mapsto e^{\mu \cdot x}}}} \text{ car } \frac{1}{(1+|z|^2)^{m+1}} \in L^2(\mathbb{R}^m)$

$\underbrace{\left| (\text{Id} - \Delta)^{m+1} (e_\mu \varphi) \right|}$

$\leq C \sup_{|\mu| \leq \varepsilon} \|(\text{Id} - \Delta)^{m+1} (e_\mu \varphi)\|_1$

$\leq C_{\kappa, \varepsilon} \sup_{|\alpha| \leq 2(m+1)} \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty \text{ si } \text{supp } \varphi \subset K$

donc la continuité pour $\|\cdot\|_Q$ implique la continuité pour $\mathcal{D}$.

→ par le point précédent, l'application

$\tilde{E} : \mathcal{P}^*(\mathcal{D}) \varphi \mapsto \varphi(0)$ est bien définie $\left\{ \begin{array}{l} \text{i.e.} \\ \text{si } \mathcal{P}^*(\mathcal{D}) \varphi_1 = \mathcal{P}^*(\mathcal{D}) \varphi_2 \\ \text{alors } \mathcal{P}^*(\mathcal{D})(\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \\ \text{et } (\varphi_1 - \varphi_2)(0) = 0 \end{array} \right.$

et est continue sur $\{\mathcal{P}^*(\mathcal{D}) \varphi, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)\}$

muni de $\|\cdot\|_Q$ donc par le th. de Hahn-Banach

on peut prolonger $\tilde{E}$ en E une forme linéaire continue pour $\|\cdot\|_Q$ et qui est donc bien une distribution.

• En fin, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \langle \mathcal{P}(\mathcal{D})E, \varphi \rangle = \langle \tilde{E}, \mathcal{P}^*(\mathcal{D}) \varphi \rangle = \varphi(0)$



Preuve du lemme ① Soit f holomorphe sur un voisinage de $\overline{D}(0,1) \subset \mathbb{C}$

et $p(z) = \sum_{k=0}^m a_k z^k$. Alors $|a_m f(0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta}) p(e^{i\theta})| d\theta$.

En effet, en notant $(z_j)_{j \leq l_0}$ les zéros de p dans $\overline{D}(0,1)$ (avec répétition), la fonction

$$q(z) = p(z) \prod_{j \leq l_0} \left(\frac{\bar{z}_j z^{-1}}{z - z_j} \right) \text{ est analytique sur un voisinage de } \overline{D}(0,1)$$

et tq $|q(z)| = |p(z)|$ si $|z| = 1$

$$\left(\text{si } |z|=1, \left| \frac{\bar{z}_j z^{-1}}{z - z_j} \right| = |z| \cdot \left| \frac{\bar{z}_j - \frac{1}{z}}{z - z_j} \right| = \left| \frac{\bar{z}_j - \bar{z}}{z - z_j} \right| = 1 \right)$$

donc par la formule de Cauchy appliquée à $f \times q$ sur $\partial D(0,1)$ on a :

$$f(0) q(0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(0,1)} \frac{f(z) q(z)}{z} dz$$

$$p(z) = a_m \prod_{i=1}^m (z - z_i)$$

$$q_0 = a_m \prod_{i=1}^m \bar{z}_i$$

d'où $|f(0) q(0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta}) q(e^{i\theta})| d\theta$

zéros de P en dehors de $\overline{D}(0,1)$

mais $|q(0)| = \left| \frac{p(0)}{\prod_{j \leq l_0} z_j} \right| = \left| \frac{a_0}{\prod_{j \leq l_0} z_j} \right| = |a_m| \prod_{j > l_0} \bar{z}_j \geq |a_m|$ et $|p| = |q|$ sur $\partial D(0,1)$.

② Avec les mêmes notations, on a plus généralement $|p^{(k)}(0) f(0)| \leq \frac{m!}{(m-k)!} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta}) p(e^{i\theta})| d\theta$

On écrit $p(z) = \prod_{i=1}^m (z - z_i)$ (on ne met pas que les racines qui sont dans $\overline{D}$)
(quitte à remplacer p par $\frac{p}{a_m}$)

et on applique le point ① avec $\prod_{i=1}^l (z - z_i)$ et $f(z) \prod_{i=l+1}^m (z - z_i)$ et on obtient :

$$\left| f(0) \prod_{i=l+1}^m \bar{z}_i \right| \leq \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta}) p(e^{i\theta})| d\theta$$

mais quand on regarde $p^{(h)}(0)$ on voit que c'est la somme de $\frac{m!}{(m-h)!}$ termes de la forme $\left(\prod_{i=h+1}^m z_i\right)$ donc

$$|f(0) p^{(h)}(0)| \leq \frac{m!}{(m-h)!} \int |f(e^{i\theta}) p(e^{i\theta})| d\theta$$

③ Maintenant si $F: \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe, $p \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_m]$ de degré $\leq m$ et $g: \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction positive intégrable, à support compact et qui ne dépend que de $|z_1| \dots |z_m|$

$$\text{alors } |F(0) \partial^\alpha p(0)| \int_{\mathbb{C}^m} |z^\alpha| g(z) dz \leq \frac{m!}{(m-\alpha)!} \int_{\mathbb{C}^m} |F(z) p(z)| g(z) dz$$

(on va comme le multi-indice $(m, m, \dots, m)$ et
 $\beta = \beta_1 \dots \beta_m$, $\beta! := \beta_1! \dots \beta_m!$)

Si f est holomorphe sur $\mathbb{C}$, alors pour tout $r > 0$ on peut appliquer le point ② à $f(rz)$ et $p(rz)$ et alors

$$|f(0) p^{(h)}(0) r^h| \leq \frac{m!}{(m-h)!} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta}) p(re^{i\theta})| d\theta$$

et si maintenant $\psi(r)$ est positive, intégrable et à support compact, en multipliant par $2\pi r \psi(r)$ et en intégrant en r on obtient

$$|f(0) p^{(h)}(0)| \int_{\mathbb{C}} |z|^h \psi(|z|) dz \leq \frac{m!}{(m-h)!} \int_{\mathbb{C}} |f(z) p(z)| \psi(|z|) dz$$

d'où le résultat en intégrant successivement sur chaque $z_1, z_2, \dots, z_m$.

④ On peut conclure en appliquant ce qui précède à

$$F(\zeta) = \hat{\varphi}(\zeta + \zeta) \quad , \quad \text{le polynôme } \zeta \mapsto g(\zeta + \zeta) \quad (\zeta \text{ fixé})$$

et $g(\zeta) = \chi_{|\zeta| \leq \varepsilon}$ et alors

$$|\hat{\varphi}(\zeta) \cdot \partial^\alpha g(\zeta)| \leq C''^{C(m, \alpha, \varepsilon)} \int_{|\zeta| \leq \varepsilon} |\hat{\varphi}(\zeta + \zeta) g(\zeta + \zeta)| d\zeta$$

et en sommant en α ,

$$|\hat{\varphi}(\zeta) \cdot Q(\zeta)| \leq C''^{C(m, \varepsilon)} \int_{|\zeta| \leq \varepsilon} |\hat{\varphi}(\zeta + \zeta) g(\zeta + \zeta)| d\zeta.$$

Ce qui conclut la preuve du lemme. $\square$

Autres preuves : [HÖRMANDER' vol I Th. 7.3.10] (Adapté d'un article du même auteur 1971)

- Par les polynômes de BERNSTEIN-SATO (1971-73)
- [WAGNER 2009 A new constructive proof of the Malgrange-Ehrenpreis Theorem].
- [DADOK-TAYLOR 1981 Local Solvability...]

Méthode 2: on suit ROSAY 1991 "A very elementary proof of
Hörmander-Ehrenpreis Theorem" qui suit les idées de
HALGRANGE.

① Inégalité de Hörmander.

pour tout Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, il existe $c > 0$ tq

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \|P(\partial)\varphi\|_2 \geq c \|\varphi\|_2.$$

où $c = |P(\partial)|_m \cdot K_{m,\Omega}$ avec $|P(\partial)|_m = \max \{a_\alpha, |\alpha| = m\}$
et $K_{m,\Omega}$ dépend de m et du diamètre de Ω .

Idée avec $\Omega =]0,1[$ et $P(\partial) = \frac{d}{dx}$: on vise $\|\varphi'\|_2 \geq c \|\varphi\|_2 \forall \varphi \in \mathcal{D}(]0,1[)$

$$\text{on écrit } \int (\chi \varphi)' \bar{\varphi} = \int \chi \varphi' \bar{\varphi} + |\varphi|^2$$

$$\int \chi \varphi \bar{\varphi}' \stackrel{!}{=} \int \chi \varphi' \bar{\varphi} \quad \|\varphi\|^2 = \int \chi (\varphi \bar{\varphi}' + \varphi' \bar{\varphi}) \leq 2 \|\varphi\|_2 \|\varphi'\|_2$$

$$\text{et } \|\varphi'\|_2 \geq \frac{1}{2} \|\varphi\|_2.$$

Cas général: Pour $P(\partial) = \sum a_\alpha \partial^\alpha$, on définit pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$P_j(\partial) \text{ de sorte que } P(\partial)(\chi_j \varphi) = \chi_j P(\partial)\varphi + P_j(\partial)\varphi \quad (\forall \varphi)$$

et alors $P_j(\partial)$ est de degré $<$ degré de $P(\partial)$.

On va montrer que $\|P_j(\partial)\varphi\|_2 \leq 2m \left(\sup_{\Omega} |\chi_j| \right) \|P(\partial)\varphi\|_2 \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ (*)
inégalité qui implique aussi $\|P(\partial)(\chi_j \varphi)\|_2 \leq (2m+1) A_\Omega \|P(\partial)\varphi\|_2$

$$\text{car } \|P(\partial)(x_j \varphi)\|_2 \leq \underbrace{\|x_j P(\partial)\varphi\|_2}_{\leq A_\Omega \|P(\partial)\varphi\|_2} + \|P_j(\partial)\varphi\|_2$$

On procède par récurrence sur m pour montrer (*):

Si $m=0$, $P(\partial)$ est une constante et les $P_j(\partial)$ sont nuls
l'inégalité est donc vérifiée.

Si on suppose l'inégalité montrée pour les opérateurs de degré $\leq m-1$,
et $P(\partial)$ de degré m . On va calculer de deux manières

$$\langle P(\partial)(x_j \varphi), P_j(\partial)\varphi \rangle \quad \leftarrow \text{produit scalaire de } L^2$$

D'une part $\langle P(\partial)(x_j \varphi), P_j(\partial)\varphi \rangle = \|P_j(\partial)\varphi\|_2^2 + \langle x_j P(\partial)\varphi, P_j(\partial)\varphi \rangle$

d'autre part $\langle P(\partial)(x_j \varphi), P_j(\partial)\varphi \rangle = \langle x_j \varphi, \underbrace{P_j^*(\partial) P_j(\partial)}_{\text{commute}} \varphi \rangle$
 $= \langle P_j^*(\partial)(x_j \varphi), P_j^*(\partial)\varphi \rangle$

et donc $\|P_j(\partial)\varphi\|_2^2 = \langle P_j^*(\partial)(x_j \varphi), P_j^*(\partial)\varphi \rangle - \langle x_j P(\partial)\varphi, P_j(\partial)\varphi \rangle$

Par hypothèse de récurrence sur P_j (et sa conséquence) on a

$$\|P_j(\partial)(x_j \varphi)\|_2 \leq (2m-1) A_\Omega \|P_j(\partial)\varphi\|_2$$

$$\|P_j^*(\partial)(x_j \varphi)\|_2$$

et comme $\langle x_j P(\partial) \varphi, P_j(\partial) \varphi \rangle \leq A_\Omega \|P(\partial) \varphi\|_2 \cdot \|P_j(\partial) \varphi\|_2$

on obtient $\|P_j(\partial) \varphi\|_2^2 \leq (2m-1) A_\Omega \|P_j(\partial) \varphi\|_2 \|P^*(\partial) \varphi\|_2$

$$+ A_\Omega \|P(\partial) \varphi\|_2 \cdot \|P_j(\partial) \varphi\|_2.$$

d'où $\|P_j(\partial) \varphi\|_2 \leq 2m A_\Omega \|P(\partial) \varphi\|_2$ qui achève la récurrence pour montrer (*).

• Maintenant on refait une récurrence sur le degré de $P(\partial)$

pour montrer $\|P(\partial) \varphi\|_2 \geq K_{m,\Omega} |P(\partial)|_m \|\varphi\|_2$

Le résultat est clair si $P(\partial)$ est de degré 0.

et si $P(\partial)$ est de degré $m \geq 1$, au moins un des $P_j(\partial)$ est de degré $m-1$ et $|P_j(\partial)|_{m-1} = |P(\partial)|_m$ et on peut conclure car

$$2m A_\Omega \|P(\partial) \varphi\|_2 \geq \|P_j(\partial) \varphi\|_2 \geq K_{m-1,\Omega} |P_j(\partial)|_{m-1} \|\varphi\|_2.$$

② On déduit de ① que si Ω est un ouvert borné et $g \in L^2(\Omega)$

alors il existe $u \in L^2(\Omega)$ tq $P(\partial) u = g$.

En effet l'équation est équivalente à

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \langle g, \varphi \rangle = \langle P^*(\partial) \varphi, u \rangle$$

On pose $E = \{ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \varphi = P^*(\partial) \psi \text{ pour un } \psi \in \mathcal{D}(\Omega) \}$

D'après l'inégalité de Hörmander, l'application (anti-linéaire)

$\psi \in E \mapsto \langle g, \psi \rangle$ est bien définie et continue sur $(E, \|\cdot\|_2)$

$\psi = P^*(\partial)\psi_1 = P^*(\partial)\psi_2$ implique $\|P^*(\partial)(\psi_1 - \psi_2)\|_2 \geq c \|\psi_1 - \psi_2\|_2$
donc $\psi_1 = \psi_2$

$$\text{et } |\langle g, \psi \rangle| \leq \|g\|_2 \|\psi\|_2 \leq \frac{1}{c} \|g\|_2 \|P^*(\partial)\psi\|_2 \leq \frac{1}{c} \|g\|_2 \|\psi\|_2$$

donc se prolonge par continuité à $\overline{E}$ qui est un espace de Hilbert
et donc par le th. de Riesz il existe $u \in \overline{E}$ tq

$$\forall \psi = P^*(\partial)\varphi, \quad \langle g, \psi \rangle = \langle \psi, u \rangle = \langle P^*(\partial)\varphi, u \rangle.$$

③ En appliquant l'inégalité de Hörmander à $\psi = e^{(\eta/2)x_1} \varphi$ ($\eta \in \mathbb{R}$)

et $Q(\partial)\psi = e^{(\eta/2)x_1} P(\partial)[e^{-\frac{\eta}{2}x_1} \psi]$ qui est aussi à coeff constants

et dont les coeff de plus haut degré sont les mêmes que ceux de $P(\partial)$

$$\text{on obtient } \int |Q(\partial)\psi|^2 \geq c \int \psi^2$$

$$\text{i.e. } \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \int_{\Omega} e^{\eta x_1} |P(\partial)\varphi|^2 \geq c \int_{\Omega} e^{\eta x_1} |\varphi|^2 \text{ avec } c \text{ indépendant de } \eta.$$

Conséquence 1: Si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et $P(\partial)\varphi = 0$ sur $\{x_1 > 0\}$

Alors $\varphi = 0$ sur $\{x_1 > 0\}$

On choisit Ω un ouvert borné contenant $\text{supp } \varphi$ puis $\eta \rightarrow \infty$

Conséquence 2 : Soit $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ à support compact

Si $\text{supp } P(\partial)\varphi \subset \overline{B}(0, r)$ alors $\text{supp } \varphi \subset \overline{B}(0, r)$

Dans le cas où $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, cela suit de la conséquence 1 via translation-rotation.

Si maintenant $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ est à support compact, on prend (ρ_ε) une famille régularisante et $\underbrace{P(\partial)[\varphi * \rho_\varepsilon]}_{\in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} = P(\partial)(\varphi) * \rho_\varepsilon$ a son support dans $\overline{B}(0, r+\varepsilon)$

donc par le cas précédent $\text{supp } \varphi * \rho_\varepsilon \subset \overline{B}(0, r+\varepsilon)$

et comme $\varphi * \rho_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{L^2} \varphi$, finalement $\text{supp } \varphi \subset \overline{B}(0, r)$.

(4) Soit $0 < r < r' < R$. Si $v \in L^2(B_{r'})$ satisfait $P(\partial)v = 0$ sur B_r , il existe (v_j) suite de $L^2(B_R)$ tq $P(\partial)v_j = 0$ sur B_R et $v_j \rightarrow v$ sur $L^2(B_r)$

Preuve : • à nouveau en régularisant par convolution, on peut se ramener au cas régulier, quitte à réduire r' pour préserver $P(\partial)v = 0$ sur $B_{r'}$.

• On utilise les critères de densité dans les espaces de Hilbert

$$(A^\perp \subset B^\perp \Rightarrow \overline{\text{Vect } A} \supset B)$$

et on doit montrer que pour $g \in L^2(B_r)$,

$$\forall \alpha \in L^2(B_R) \text{ tq } P(\partial)\alpha = 0, \langle \alpha, g \rangle_{L^2(B_r)} = 0 \Rightarrow \langle v, g \rangle_{L^2(B_r)} = 0.$$

• Claim : il existe $w \in L^2(B_R)$ tq $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \langle \varphi, g \rangle_{L^2(B_r)} = \langle P(\partial)\varphi, w \rangle_{L^2(B_r)}$

Cela revient à montrer $|\langle \varphi, g \rangle_{L^2(B_n)}| \leq C \|P(\partial) \varphi\|_{L^2(B_R)}$

→ si $P(\partial) \varphi = 0$ on a effectivement $\varphi = 0$ et $\langle \varphi, g \rangle_{L^2(B_n)} = 0$

→ si $P(\partial) \varphi \neq 0$, par ② il existe $\psi \in L^2(B_R)$ tq $P(\partial) \psi = P(\partial) \varphi$

et $\|\psi\|_{L^2(B_R)} \leq C_1 \|P(\partial) \varphi\|_{L^2(B_R)}$ pour un certain C_1

et alors $\langle \varphi, g \rangle_{L^2(B_n)} = \langle \varphi - \psi, g \rangle_{L^2(B_n)} + \langle \psi, g \rangle_{L^2(B_n)} = \langle \psi, g \rangle_{L^2(B_n)}$

et donc $|\langle \varphi, g \rangle_{L^2(B_n)}| \leq C_1 \|g\|_2 \|P(\partial) \varphi\|_{L^2(B_R)}$

- On prend g et w comme ci-dessus qu'on étend sur $\mathbb{R}^n$ en $\tilde{g}, \tilde{w}$ avec $\tilde{g} = 0$ sur $\mathbb{R}^n \setminus B_n$ et $\tilde{w} = 0$ sur $\mathbb{R}^n \setminus B_R$.

Par définition $\tilde{g} = P^*(\partial) \tilde{w}$ avec $\tilde{w}$ à support compact
 $\text{supp } P^*(\partial) \tilde{w} \subset \overline{B_n}$

donc par la conséquence 2 de ③, $\text{supp } \tilde{w} \subset \overline{B_n}$ i.e. $w = 0$ sur $B_R \setminus B_n$

- On prend donc $v \in \mathcal{D}(B_n)$ tq $P(\partial) v = 0$ sur B_n et on l'étend à $\mathbb{R}^n$

Alors $\langle v, g \rangle_{L^2(B_n)} = \langle P(\partial) v, w \rangle_{L^2(B_R)} = \langle P(\partial) v, w \rangle_{L^2(B_n)} = 0$.

⑤ On en déduit que si $g \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ alors il existe $u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ t.q. $P(\partial)u = g$.

Par ① il existe $u_1 \in L^2(B_2)$ t.q. $P(\partial)u_1 = g$ sur B_2

Par récurrence on suppose qu'il existe $u_p \in L^2(B_{p+1})$ t.q. $P(\partial)u_p = g$ sur B_{p+1} .

On choisit u_{p+1} de la façon suivante:

soit $w \in L^2(B_{p+2})$ solution de $P(\partial)w = g$ sur B_{p+2}

sur B_{p+1} on a $P(\partial)(w - u_p) = 0$ donc par le point précédent

il existe $v \in L^2(B_{p+2})$ t.q. $P(\partial)v = 0$ et $\|v - (u_p - w)\|_{L^2(B_p)} \leq \frac{1}{2^p}$

et on pose $u_{p+1} = v + w$. Alors $P(\partial)u_{p+1} = g$ sur B_{p+2}

et $\|u_{p+1} - u_p\|_{L^2(B_p)} \leq \frac{1}{2^p}$ donc (u_p) converge dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$

et sa limite satisfait $P(\partial)u = g$.

⑥ Conclusion On pose $H(x_1 \dots x_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \forall i, x_i \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Alors $\frac{\partial^n}{\partial x_1 \dots \partial x_n} H = \delta_0$. Or par le point précédent il existe $u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$

t.q. $P(\partial)u = H$. On pose $E = \frac{\partial^n u}{\partial x_1 \dots \partial x_n}$. Alors

$$P(\partial)E = P(\partial) \frac{\partial^n u}{\partial x_1 \dots \partial x_n} = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \dots \partial x_n} P(\partial)u = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \dots \partial x_n} H = \delta_0$$

□

Méthode 3 on suit FOLLAND 1995 Introduction to Partial Differential Equations

(puis de NIRENBERG '59)

$$\text{On a } \widehat{P(\partial)u} = p(z_1) \hat{u}(z_1) \quad p(z_1) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha (i z_1)^\alpha.$$

$$\text{On voudrait prendre } u(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int \frac{\hat{f}(z_1)}{p(z_1)} e^{+i z_1 \cdot x} dz_1$$

mais on ne peut pas diviser par p : on va profiter du fait que $\hat{f}$ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^m$ (si supp f compact) pour intégrer sur un autre contour.

- ① Pour fixer les idées, après rotation des coordonnées et division par le coeff dominant que $p(z_1) = z_m^m + \text{termes d'ordre inférieurs en } z_m$
- A $z_1' = z_1 \dots z_{m-1}$ fixés, on voit $z_m \mapsto p(z_1', z_m)$ comme un polynôme de degré m , et on note $\alpha_1(z_1') \dots \alpha_m(z_1')$ ses zéros.
- rangés de sorte que $\text{Im } \alpha_i(z_1') \leq \text{Im } \alpha_j(z_1')$ si $i \leq j$
 et $\text{Re } \alpha_i(z_1') \leq \text{Re } \alpha_j(z_1')$ si $\text{Im } \alpha_i(z_1') = \text{Im } \alpha_j(z_1')$
- Par le th. de Ponché, une petite perturbation de z_1' donne une petite perturbation des zéros de $p(z_1', z_m)$ donc les $\text{Im } \alpha_j(z_1')$ sont C^∞ en z_1' .

Lemme | Il existe $\phi: \mathbb{R}^{m-1} \rightarrow [-m, m]$ mesurable tq
 $\forall z_j \in \mathbb{R}^{m-1}, \min_{j \in \llbracket 1, m \rrbracket} |\phi(z_j') - \operatorname{Im} \lambda_j(z_j')| \geq 1.$

Preuve: Les $(\operatorname{Im} \lambda_j(z_j'))_j$ sont au plus k points distincts de $\mathbb{R}$
 donc au moins un intervalle $[-m-1+2h, -m+1+2h[$
 ($h \in \llbracket 0, m \rrbracket$) n'en contient aucun, auquel cas on pose
 $\phi(z_j')$ le milieu de celui-ci.

Autrement dit on pose $V_h = \{z_j', \forall j, \operatorname{Im} \lambda_j(z_j') \notin [-m-1+2h, -m+1+2h[$
 (boîlien) $-m+1+2h[$
 et $\phi(z_j') = 2h-m$ pour $x \in V_h \setminus \bigcup_{l=0}^{h-1} V_l$ □

Lemme | Si Q est un polynôme unitaire de degré m tq $Q(0) \neq 0$
 alors $|Q(0)| \geq \left(\frac{d}{2}\right)^m$ où $d = \min |\lambda_j|$ où $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ sont
 les zéros de Q .

Preuve: $Q(z) = \prod_{i=1}^m (z - \lambda_i)$ donc $\left| \frac{Q(z)}{Q(0)} \right| = \prod_{i=1}^m \left| 1 - \frac{z}{\lambda_i} \right| \leq 2^m$ si $|z| \leq d$.
 et $Q^{(m)}(0) = m!$ donc par la formule de Cauchy,
 $m! = |Q^{(m)}(0)| = \left| \frac{m!}{2i\pi} \int_{C(0,d)} \frac{Q(z)}{z^{m+1}} dz \right| \leq \frac{m!}{2\pi} \cdot \frac{2\pi d}{d^{m+1}} |Q(0)| 2^m$ □

② si $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ il existe $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ t_j $P(\partial)u = f$.

En effet avec les notations précédentes, on peut poser

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\text{Im } z_n = \phi(z')} \frac{\hat{f}(z_n)}{p(z_n)} e^{i z_n \cdot x} dz_n dz'. (*)$$

Par le dernier lemme appliqué à $z \mapsto p(z', z_n + z)$ on a

$$|p(z', z_n)| \geq \frac{1}{2^n} \min_j |2_j(z') - z_n| \geq \frac{1}{2^n} \text{ si } \text{Im } z_n = \phi(z')$$

mais par les propriétés classiques, $\hat{f}(z_n)$ est à décroissance rapide pour $|\text{Re } z_n| \rightarrow \infty$ si $|\text{Im } z_n|$ reste borné

et donc l'intégrande de (*) est bornée et à décroissance rapide

donc elle est absolument convergente et on peut aussi la

dérivée en x comme on veut et donc

$$P(\partial)u = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\text{Im } z_n = \phi(z')} \hat{f}(z_n) e^{i z_n \cdot x} dz_n dz'$$

mais cette fois on peut déformer le contour et se ramener à l'axe réel et donc $P(\partial)u = f$

③ On définit K sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ par ($f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$)

$$\langle K, f \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \int_{\text{Im } z_m = \phi(z')} \frac{\hat{f}(-z)}{p(z)} dz_m dz'.$$

Comme au point précédent, l'intégrale est majorée par

$$C \sup_{|\text{Im } z_m| \leq m} \frac{|\hat{f}(z_m)|}{(1+|z_m|)^{m+1}} \leq C' \sum_{|\alpha| \leq m+1} \|\partial^\alpha f\|_\infty$$

où C, C' ne dépendent que du support de f , donc K définit une distribution.

De plus, $\langle P(\partial)K, f \rangle = \langle K, \overbrace{P(-\partial)}^{\text{de symbole } p(-z)} f \rangle$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \int_{\text{Im } z_m = \phi(z')} \hat{f}(-z) dz_m dz'$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int \hat{f} = f(0).$$

Rq:



Dans le cas des opérateurs linéaires à coefficients non constants, la situation n'est pas si simple : un contre-exemple dû à LEWY '57 affirme que pour $P(x, y, t, \partial) = \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} - 2i(x+iy) \frac{\partial}{\partial t}$ il existe $f \in C^\infty$ t. $P(x, y, t, \partial)u = f$ n'a pas de solution.

II) Propagation des singularités.

Au chapitre I pour l'équation des ondes et au chapitre II pour les équations de transport, on a vu émerger des notions de cône de dépendance et de propagation des singularités (par ex pour les équations de transport, si u_0 a des singularités, alors $u(t, \cdot)$ aussi, et les singularités se propagent le long des caractéristiques).

On cherche à généraliser de telles observations pour des EDP linéaires $P(x, \partial)u = f$ en utilisant l'analyse de Fourier, la difficulté étant qu'a priori, l'"évaluation" de la régularité d'une fonction u via le comportement de sa transformée de Fourier a un aspect "global". C'est l'idée de l'analyse micro locale qu'on aborde ici.

II.1) Front d'onde

Au paragraphe précédent, on a introduit l'ensemble $\text{supp sing } T$ qui localise les lieux de non-régularité de T . Le souci est que cette information est insuffisante pour pouvoir "suivre" son comportement dans une EDP. L'idée de l'analyse micro-locale est donc de travailler dans l'espace des (x, ξ) où x est dans l'espace de départ des fonctions et ξ est la variable de Fourier.

Déf: Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$.

• On dit que T est microlocalement de classe C^∞ en un point $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^m \times (\mathbb{R}^m \setminus \{0\})$ s'il existe un ouvert $\omega \subset \mathbb{R}^m$ contenant x_0 et un cône ouvert Γ de $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ contenant ξ_0

$\text{tg } \forall \varphi \in \mathcal{D}(\omega), \forall N \in \mathbb{N}, \exists C_N > 0, \forall \xi \in \Gamma, \left| \widehat{\varphi T}(\xi) \right| \leq \frac{C_N}{(1+|\xi|)^N} \quad (*)$

• L'ensemble des points $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^m \times (\mathbb{R}^m \setminus \{0\})$ où T n'est pas microlocalement C^∞ est appelé Front d'onde de T et est noté $\text{WF}(T)$.

Rq: On peut discuter des variantes de cette définition, en particulier dans une des preuves qui suivra, on devra connaître la dépendance de C_N par rapport à φ .

Plus précisément, on peut remplacer dans la déf précédente " $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\omega)$ " par " $\exists \varphi \in \mathcal{D}(\omega) \text{ t.q. } \varphi(x_0) \neq 0$ " (quitte à changer ω)

On va vérifier que c'est le cas et en déduire une dépendance possible de C_N par rapport à φ .

Supposons donc qu'il existe $\varphi \in \mathcal{D}(\omega) \text{ t.q. } \varphi(x_0) \neq 0$ et $\widehat{\varphi_T}$ à décroissance rapide pour $z \in \Gamma$. Il existe $\omega' \subset \omega$ t.q. φ ne s'annule pas sur ω' . On prend donc $\psi \in \mathcal{D}(\omega')$ et alors

$$\widehat{\psi_T} = \widehat{\frac{\psi}{\varphi} \cdot \varphi_T} = \widehat{v} * \widehat{w} \text{ où } v = \frac{\psi}{\varphi} \in \mathcal{D}(\omega') \text{ et } w = \varphi_T.$$

$$= \underbrace{\int_{\left| \frac{\eta}{|\eta|} - \frac{z_0}{|z_0|} \right| < \delta} \widehat{v}(z-\eta) \widehat{w}(\eta) d\eta}_{I_1(z)} + \underbrace{\int_{\left| \frac{\eta}{|\eta|} - \frac{z_0}{|z_0|} \right| \geq \delta} \widehat{v}(z-\eta) \widehat{w}(\eta) d\eta}_{I_2(z)}$$

Pour $I_1(z)$ on choisit δ de sorte que $\left| \frac{\eta}{|\eta|} - \frac{z_0}{|z_0|} \right| < \delta$ implique $\eta \in \Gamma$ et donc $\widehat{w}$ à décroissance rapide en η
(et $\widehat{v}$ à décroissance rapide dans toutes les directions)

$$(1+|z|)^N |I_1(z)| \leq \int_{\mathbb{R}^m} \frac{C_N (1+|z|)^N}{(1+|z-\eta|)^{2N}} \cdot \frac{C'_N}{(1+|\eta|)^N} \quad \text{or } \frac{1+|z|}{1+|\eta|} \leq 1+|z-\eta|$$

$$\leq C_N \cdot C'_N \int \frac{d\eta}{(1+|z-\eta|)^N} d\eta = C_N C'_N \underbrace{\int \frac{d\eta}{(1+|\eta|)^N}}_{\text{intégrable si } N > m+1}$$

Pour $I_2(z)$ on suppose $\left| \frac{z}{|z|} - \frac{z_0}{|z_0|} \right| < \frac{\delta}{2}$ et donc $\left| \frac{\eta}{|\eta|} - \frac{z}{|z|} \right| > \frac{\delta}{2} (*)$

$$\text{On en déduit } |z-\eta| \geq c_\delta (|z|+|\eta|)$$

$$\text{(en élevant au carré la condition } (*) \text{ on obtient } \frac{z \cdot \eta}{|z||\eta|} \leq 1 - \frac{\delta^2}{8}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } |z-\eta|^2 &= |z|^2 + |\eta|^2 - 2z \cdot \eta \geq |z|^2 + |\eta|^2 - 2|z||\eta|(1 - \frac{\delta^2}{8}) \\ &\geq \underbrace{|z-\eta|^2}_{\geq 0} + \frac{\delta^2}{4} \underbrace{|z||\eta|}_{\geq \frac{1}{4}(|z|+|\eta|)^2} \end{aligned}$$

De plus w est à support compact donc il existe $M \in \mathbb{N}$ t_q $\left. \begin{array}{l} \widehat{w}(\eta) \leq C (1+|\eta|)^M \quad \forall \eta \\ \text{classique} \\ \text{(exo)} \end{array} \right\}$

$$\text{d'où } |I_2(z)| \leq \int_{\left| \frac{\eta}{|\eta|} - \frac{z_0}{|z_0|} \right| \geq \delta} C_N \underbrace{(1+|z-\eta|)^{-N}}_{\leq C_\delta^{-N} (1+|z|+|\eta|)^{-N}} C (1+|\eta|)^M d\eta \leq C'_{N,\delta} (1+|z|)^{-N+M+m+1}$$

$$\leq C_\delta^{-N} (1+|z|+|\eta|)^{-N} \leq C_\delta^{-N} (1+|\eta|)^{-N-m-1}$$

et donc finalement $\widehat{\psi_T}$ est à décroissance rapide $(1+|z|)^{-N+M+m+1}$

et on peut vérifier que la constante dépend en φ seulement par

$$\sum_{|\alpha| \leq p} \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty \text{ avec } p = N+M+m+1.$$

R_q : Par définition, $\forall t > 0$, $(x, z) \in WF(T) \Leftrightarrow (x, tz) \in WF(T)$.

On peut voir $WF(T)$ comme un fermé de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{S}^{m-1}$.

Prop: La projection sur $\mathbb{R}^m$ du Front d'onde est le support singulier
 $\pi_x(WF(T)) = \text{Supp sing } T$.

Preuve: Soit $x_0 \in (\text{Supp sing } T)^c$. Il existe un voisinage ω de x_0

tg pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\omega)$, φT est de classe C^∞ .

Comme φT est à support compact, $\varphi T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ donc $\widehat{\varphi T} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$

et est donc à décroissance rapide, et donc

$\forall z_0, (x_0, z_0) \in WF(T)^c$. On a montré

$$\pi_x(WF(T)) \subset \text{Supp sing } T.$$

• Réciproquement, soit $x_0 \in \pi_x(WF(T))^c$, i.e.

$\forall z \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}, (x_0, z) \notin WF(T)$.

i.e. $\exists \omega_{x_0}$ ouvert contenant x_0 et $\exists \Gamma_z$ cône contenant z
 tg(*)

Par compacité de $\mathbb{S}^{m-1}$, on peut trouver un nb fini de (z_i) tg les

(Γ_{z_i}) recouvrent $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$. Et donc avec $\omega = \bigcap \omega_i$ qui est un

ouvert contenant x_0 , on a bien $\forall \varphi, \forall N, \exists C_N, \forall z, \widehat{|\varphi T|} \leq \frac{C}{(1+|z|)^N}$ ^{intersection finie}
 donc $\varphi T \in C^\infty$ □

Exemples: • si u est C^∞ , $WF(u) = \emptyset$

• Si $T = \delta_0$: pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\langle \varphi \delta_0, \psi \rangle = \langle \delta_0, \varphi \psi \rangle = \varphi(0) \psi(0)$

donc $\varphi \delta_0 = \varphi(0) \delta_0$ et donc $\widehat{\varphi \delta_0} = \varphi(0) \cdot \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}$

qui n'est à décroissance rapide que si $\varphi(0) = 0$.

Ainsi si $x_0 \neq 0$, alors δ_0 est microlocalement C^∞ en tout (x_0, ξ_0)

et si $x_0 = 0$, alors δ_0 n'est microlocalement C^∞ en aucun (x_0, ξ_0)

$$\text{d'où } WF(\delta_0) = \{0\} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$$

• Soit $H = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}$ (fonction de Heaviside)

$$\text{soit } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}): \quad \widehat{\varphi H}(\xi) = \int (\varphi H)(x) e^{-i\xi x} dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \varphi(x) e^{-i\xi x} dx = \left[\varphi(x) \frac{e^{-i\xi x}}{-i\xi} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \varphi'(x) \frac{e^{-i\xi x}}{-i\xi} dx$$

$$= \frac{1}{i\xi} \varphi(0) + \frac{1}{i\xi} \int_0^{+\infty} \varphi'(x) e^{-i\xi x} dx.$$

on fait une 2^e IPP pour s'assurer que le reste

$$= \frac{1}{i\xi} \varphi(0) + \frac{1}{i\xi} \left[\varphi'(x) \frac{e^{-i\xi x}}{-i\xi} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \varphi''(x) \frac{e^{-i\xi x}}{(-i\xi)^2} dx$$

ne va pas "compenser" le

n'est pas à décroissance rapide $O\left(\frac{1}{\xi^2}\right)$
(sauf si $\varphi^{(k)}(0) = 0 \forall k$)

et donc $WF(H) = \{0\} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$

• Exo: $H(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$: $WF(H) = \{(\xi, \xi), x_1 = 0, \xi_1 \neq 0, \xi_2 = 0\}$.

- Si V est un sev de $\mathbb{R}^n$ et $T = \varphi dS$ avec $\varphi \in C^\infty(V)$

et dS la mesure de Lebesgue
sur V

$$\text{alors } WF(T) = \text{supp } \varphi \times (V^\perp \setminus \{0\})$$

(généralise $T = \delta_0$ où $\varphi = 1$ et $V = \{0\}$)

(cf HÖRMANDER vol 1
page 256)

- $T(x) = \frac{1}{(x + i0^+)}$ qui est la limite dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de $\mu_\varepsilon(x) = \frac{1}{x + i\varepsilon}$ quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

$$\text{i.e. } \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \langle T, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x) dx}{x + i\varepsilon} \left(= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx - i\pi \varphi(0) \right)$$

$$\text{Alors } WF(T) = \{0\} \times \mathbb{R}_+^*.$$

- si Ω est un ouvert régulier de $\mathbb{R}^n$,

$$WF(\mathbb{1}_\Omega) = \{(x, \xi), x \in \partial\Omega, \xi \text{ est normal à } \partial\Omega \text{ en } x\}.$$

Rq: Une des grandes applications du front d'onde est de pouvoir définir des opérations sur les distributions "sous condition de front d'onde".

Par exemple, si $T, S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ sont telles qu'il n'existe pas (x, ξ)

$$\text{t.q. } (x, \xi) \in WF(T) \text{ et } (x, -\xi) \in WF(S)$$

cf HÖRMANDER vol I
§ 8.2 et p 267.

alors on peut définir $T.S$

- Il existe des fronts d'onde permettant d'évaluer d'autres types de régularité que C^∞ , comme la régularité analytique ou Sobolev.

$$\bullet \forall (x, \xi) \in WF(u), (x, -\xi) \in WF(\bar{u})$$

II. 2) Front d'onde d'une solution d'EDP.

On commence par le résultat suivant qui améliore l'inclusion facile $\text{Supp ring } P(x, \partial)u \subset \text{Supp ring } u$.

Prop: Si $P(x, \partial)$ est un opérateur linéaire à coefficients C^∞ , et $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$
alors $\text{WF}(P(x, \partial)T) \subset \text{WF}(T)$.

Preuve: Comme on sait facilement $\text{WF}(T+S) \subset \text{WF}(T) \cup \text{WF}(S)$, il suffit de montrer $\text{WF}(aT) \subset \text{WF}(T)$ pour $a \in C^\infty$
et $\text{WF}(\partial^\alpha T) \subset \text{WF}(T)$.

La première formule suit facilement de la définition, vérifions la 2^{ème} formule.

Soit $(x_0, \xi_0) \in \text{WF}(T)^c$: il existe ω ouvert contenant x_0

Γ cône ouvert contenant ξ_0 tel pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\omega)$

$\widehat{\varphi T}$ est à décroissance rapide sur Γ .

Mais si $\varphi \in \mathcal{D}(\omega)$, $\varphi \frac{\partial T}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi T) - \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x_j} \varphi\right) T}_{\in \mathcal{D}(\omega) \text{ donc ne pose pas de problème}}$

$\frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi T) = i \xi_j \widehat{\varphi T}$ reste à décroissance rapide sur Γ .

et donc $(x_0, \xi_0) \in \text{WF}\left(\frac{\partial T}{\partial x_j}\right)^c$ d'où le résultat pour $\frac{\partial}{\partial x_j}$

et ensuite on peut itérer.

□

On a une réciproque partielle :

Th Soit $P(x, \partial) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial^\alpha$ un opérateur différentiel linéaire
coeff C^∞ . Alors $\forall u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$,

$$WF(u) \subset WF(P(x, \partial)u) \cup Car(P(x, \partial))$$

où $Car P(x, \partial) = \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, p_m(x, \xi) = 0\}$

et $p_m(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=m} p_\alpha(x) (i\xi)^\alpha$ est appelé symbole principal.

($p(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} p_\alpha(x) (i\xi)^\alpha$ est appelé symbole)

Exemple : un opérateur $P(x, \partial)$ est dit elliptique si

$$p_m(x, \xi) \neq 0 \quad \forall (x, \xi), \text{ i.e. } Car P(x, \partial) = \emptyset$$

et dans ce cas $WF(u) = WF(P(x, \partial)u)$

et en particulier $\text{supp } u = \text{supp } P(x, \partial)u$
(qu'on avait montré plus haut pour un opérateur à
coeff. constants)

Preuve . Soit (x_0, ξ_0) tq $p_m(x_0, \xi_0) \neq 0$. Il existe un voisinage de x_0

et Γ voisinage conique de ξ_0 tq $|p_m(x, \xi)| \geq c|\xi|^m \quad \forall x \in \omega \quad \forall \xi \in \Gamma$.

On pose $f = P(x, \partial)u$ et on va vouloir estimer $\widehat{\psi u}(\xi)$ où $\psi \in \mathcal{D}(\omega)$.

Remarquons que ${}^tP : v \mapsto \sum_{\alpha} (-\partial)^{\alpha} [a_{\alpha} v]$ est tel que si $Pu = f$

alors $\langle u, {}^tP v \rangle = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in \mathcal{D}$

$$\left(\begin{aligned} \langle Pu, v \rangle &= \langle \sum_{\alpha} a_{\alpha} \partial^{\alpha} u, v \rangle = \sum_{\alpha} \langle \partial^{\alpha} u, a_{\alpha} v \rangle \\ &= \sum_{\alpha} \langle u, \underbrace{(-1)^{|\alpha|} \partial^{\alpha}}_{(-\partial)^{\alpha}} (a_{\alpha} v) \rangle. \end{aligned} \right)$$

et on cherche v de sorte que $\langle u, {}^tP v \rangle$ soit $\widehat{\psi u}(z)$

cà d ${}^tP v(x) = \psi(x) e^{-i z \cdot x}$ "approximativement".

• On écrit ${}^tP v = \sum_{|\alpha| \leq m} (-\partial)^{\alpha} [a_{\alpha} v]$

or pour avoir des dérivées d'ordre $|\alpha| = m$ dans $\partial^{\alpha} [a_{\alpha} v]$ il faut faire porter toutes les dérivées sur v , donc le symbole

principal de tP est $g_m(x, z) = \sum_{|\alpha|=m} (-i z)^{\alpha} a_{\alpha}(x) = p_m(x, -z)$

• On note ${}^tP(x, \partial) = \sum_{|\alpha| \leq m} b_{\alpha} \partial^{\alpha}$ et on calcule pour tout $\psi \in \mathcal{D}(\omega)$,
(et $z \in \mathbb{R}^n$ de sorte que

$$e^{+i z \cdot x} {}^tP \left[\frac{\psi e^{-i z \cdot x}}{p_m(x, z)} \right] = I(\psi) + R_z(\psi) \quad |p_m(x, z)| \geq c |z|^m$$

où I contient les termes où toutes les dérivées portent sur $e^{-i z \cdot x}$

et $R_z(\psi)$ contient le reste. Alors

$$\mathcal{I}(\psi) = e^{+i\zeta \cdot x} \sum_{|\alpha|=m} \left(\frac{\psi}{p_m} b_\alpha \right) \partial^\alpha [e^{-i\zeta \cdot x}] = e^{-i\zeta \cdot x} \frac{\psi}{p_m} \sum_{|\alpha|=m} \underbrace{b_\alpha (-i\zeta)^\alpha}_{a_\alpha (i\zeta)^\alpha} e^{+i\zeta \cdot x}$$

$$= \psi$$

$$\text{et } R_\zeta(\psi) = e^{+i\zeta \cdot x} \left[\sum_{|\alpha| \leq m-1} \left(\frac{\psi}{p_m} b_\alpha \right) \partial^\alpha [e^{-i\zeta \cdot x}] + \sum_{\substack{\alpha = \beta + \gamma \\ |\beta| > 0}} b_\alpha \partial^\beta \left(\frac{\psi}{p_m} \right) \partial^\gamma (e^{-i\zeta \cdot x}) \right]$$

$$\text{On pose } \psi_{\zeta, N} = \sum_{m=0}^{N-1} (-R_\zeta)^m(\psi) \quad \left(\psi \text{ approche } (\text{Id} + R)^{-1} \psi = \sum_{m=0}^{\infty} (-R)^m \psi \right)$$

$$\begin{aligned} \text{Alors } t_p \left[\frac{\psi_{\zeta, N}}{p_m} e^{-i\zeta \cdot x} \right] &= \left(\psi_{\zeta, N} + R_\zeta[\psi_{\zeta, N}] \right) e^{-i\zeta \cdot x} \\ &= \left[\sum_{m=0}^{N-1} (-1)^m R_\zeta^m \psi + \underbrace{\sum_{m=0}^{N-1} (-1)^m R_\zeta^{m+1} \psi}_{-\sum_{m=1}^N (-1)^m R_\zeta^m \psi} \right] e^{-i\zeta \cdot x} \\ &= \left[\psi + (-1)^{N+1} R_\zeta^N(\psi) \right] e^{-i\zeta \cdot x}. \end{aligned}$$

• Ainsi pour $\zeta \in \mathcal{T}$, $\widehat{\varphi_u}(\zeta) = \langle u, \psi e^{-i\zeta \cdot x} \rangle$

$$= \underbrace{\langle u, t_p \left[\frac{\psi_{\zeta, N}}{p_m} e^{-i\zeta \cdot x} \right] \rangle}_{\langle f, \underbrace{\frac{\psi_{\zeta, N}}{p_m} e^{-i\zeta \cdot x}}_{(1)} \rangle} + (-1)^N \langle u, R_\zeta^N(\psi) e^{-i\zeta \cdot x} \rangle \quad (2)$$

(1)

- On revient à l'expression de R_z qui est une somme (finie) de $a(x) z^\delta$ où $a(x) \in \mathcal{D}(\omega)$ et où $|\delta| \leq -1$ (on rappelle que $\partial^\beta \left(\frac{1}{p_m}\right)$ est $O\left(\frac{1}{|z|^{m+|\beta|}}\right)$ et donc pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\exists C_\alpha$,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\partial^\alpha R_z(\psi)| \leq \frac{C_\alpha}{|z|}$$

En itérant R_z on "perd" au moins un exposant en z , donc

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\partial^\alpha R_z^N \psi| \leq \frac{C_{\alpha,N}}{|z|^N}$$

- On note m_0 l'ordre de u ($\in \mathcal{D}'$) sur un voisinage de $\text{supp } \psi$.

Alors le terme ② précédemment s'estime par

$$\max_{|\alpha| \leq m_0} \sup |\partial^\alpha [e^{-iz \cdot x} R_z^N(\psi)]| \leq C |z|^{m_0 - N}$$

- On suppose $(x_0, z_0) \in \text{WF}(f)^\complement$ et donc quitte à réduire ω et Γ choisis au début de la preuve, on a

$$\forall \psi \in \mathcal{D}(\omega), \forall p, \forall z \in \Gamma, \underbrace{|\widehat{f\psi}(z)|}_{\langle f, \psi e^{-iz \cdot x} \rangle} \leq \frac{C_p}{|z|^p} \max_{1 \leq l \leq p+1} \|\partial^l \psi\|_\infty$$

voir la remarque suivant la déf de WF

qu'on applique à $\psi = \frac{\Psi_{z,N}}{p_m(\cdot, z)}$ et donc finalement

$\widehat{\psi u}(z)$ est à décroissance rapide pour les $z \in \Gamma$ donc $(x_0, z_0) \in \text{WF}(\omega)^\complement$

II.3) Opérateurs pseudo-différentiels.

Afin d'aller plus loin dans l'analyse du front d'onde, on doit introduire une classe d'opérateurs plus large que les opérateurs différentiels linéaires à coefficients variables: pour cela on observe

que si $P(x, \partial) = \sum_{\alpha} a_{\alpha}(x) \partial^{\alpha}$ on a pour $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$P(x, \partial)u = \sum_{\alpha} a_{\alpha}(x) \partial^{\alpha} u = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\xi) \left[\sum_{\alpha} a_{\alpha}(x) (i\xi)^{\alpha} \right] e^{i\xi \cdot x} \frac{dx}{(2\pi)^{n/2}}$$

$$u = \mathcal{F}^{-1} \hat{u} = \int \hat{u}(\xi) e^{i\xi \cdot x} \frac{d\xi}{(2\pi)^{n/2}} \quad \text{donc } \partial^{\alpha} u = \int \hat{u}(\xi) (i\xi)^{\alpha} e^{i\xi \cdot x} \frac{d\xi}{(2\pi)^{n/2}}$$

donc $P(x, \partial)u$ est de la forme

$$\int \hat{u}(\xi) p(x, \xi) e^{i\xi \cdot x} \frac{d\xi}{(2\pi)^{n/2}} \quad \text{où } p(x, \cdot) \text{ est un polynôme en } \xi$$

Déf: Pour $m \in \mathbb{R}$, on note $S^m = S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$

l'ensemble des fonctions $a \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ telles que

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n, \quad |\partial_x^{\alpha} \partial_{\xi}^{\beta} a(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} (1 + |\xi|)^{m - |\beta|}$$

et on dira que a est un symbole d'ordre m .

Rq: S^m est un espace de Fréchet pour les semi-normes $\left\| \frac{\partial_x^{\alpha} \partial_{\xi}^{\beta} a}{(1 + |\xi|)^{m - |\beta|}} \right\|_{\infty}$

Exemple : $p(x, z) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) (i z)^\alpha$ avec $a_\alpha \in C_b^\infty$

est un symbole d'ordre $m \in \mathbb{N}$.

• pour $m \in \mathbb{R}$, $(1 + |z|^2)^{\frac{m}{2}}$ est un symbole d'ordre m .

• $a(z) = |z|^m$ n'est pas tout à fait un symbole à cause du manque de régularité en 0 mais on peut écrire

$$a(z) = \underbrace{\chi(z) |z|^m}_{\text{symbole}} + \underbrace{(1 - \chi(z)) |z|^m}_{\text{à support compact}} \text{ où } \chi = 0 \text{ près de } 0 \text{ et } 1 \text{ loin de } 0$$

• $(x, z) \mapsto e^{i z \cdot x}$ n'est pas un symbole (gain de x si ∂_x et pas de "perte" en z si ∂_z)

• $z \mapsto \frac{1}{1 + |z|}$ est un symbole sur $\mathbb{R}$ mais pas sur $\mathbb{R}^2$.

Déf.-Prop. : Soit $m \in \mathbb{R}$. Si $a \in S^m$ alors pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

on peut définir $A(u) : x \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} a(x, z) \hat{u}(z) \frac{dz}{(2\pi)^{n/2}}$

et A est continu de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (on note aussi $Op(a)$)

Un tel opérateur est appelé opérateur pseudo-différentiel et a est son symbole.

Preuve : • $|a(x, z) \hat{u}(z)| \leq C(1+|z|)^m |\hat{u}(z)|$ est bien intégrable en z

donc $Au(x)$ est bien défini

• $|\partial_x^\alpha (a(x, z) \hat{u}(z))| \leq C(1+|z|)^m |\hat{u}(z)|$ est une domination ind. de x
donc par les th. de régularité des intégrales à paramètre, $Op(a)u \in C^\infty$.

• $\|Au\|_\infty \leq C \int (1+|z|)^m |\hat{u}(z)|$

$$\leq C \|(1+|z|)^{m+n+1} \hat{u}\|_\infty \int \underbrace{\frac{1}{(1+|z|)^{m+1}}}_{< \infty} dz$$

$$\leq C' N_{m+n+1}(\hat{u})$$

$$\leq C'' N_p(u) \text{ pour un certain } p \text{ (car } \mathcal{F}: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S} \text{ est } C^\infty)$$

$$N_p(u) = \sum_{|k| \leq p} \|x^\alpha \partial^\beta u\|_\infty$$

• Il reste à estimer $\|x^\alpha \partial_x^\beta Op(a)(u)\|_\infty$, ce qu'on peut faire par récurrence avec les formules suivantes :

$$\partial_{x_j} Op(a)u = Op(a)(\partial_{x_j} u) + Op(\partial_{x_j} a)u$$

$$x_j Op(a)u = Op(a)(x_j u) + i Op(\partial_{z_j} a)u$$

et l'observation que si $a \in S^m$ alors $\partial_{x_j} a \in S^m$ et $\partial_{z_j} a \in S^{m-1}$ $\square$

L'étude des opérateurs pseudo diff. dépasse le cadre de ces notes, mais voici les premiers résultats importants qu'on peut démontrer :

- ① Un opérateur pseudo diff d'ordre m se prolonge en une appli continue de $H^s(\mathbb{R}^n)$ dans $H^{s-m}(\mathbb{R}^n)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.
- ② On peut composer deux opérateurs pseudo diff et cela donne un opérateur pseudo diff dont l'ordre est la somme des ordres.
- ③ Un opérateur pseudo diff d'ordre m admet un adjoint qui est aussi un opérateur pseudo diff d'ordre m .
- ④ Si $a \in S^m$, on dit que $Op(a)$ est micro elliptique en $(x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ si $|a(x, \eta)| \geq c |\eta|^m$ pour tout η grand et dans un voisinage conique de ξ .
On note $\text{Car}(A)$ l'ensemble de ces points.

Similairement au cas $P(x, \partial)$, on a les inclusions
 $WF(Au) \subset WFu$ et $WF(u) \subset WF(Au) \cup \text{Car } A$.

En particulier si $Au \in C^\infty$ alors $WFu \subset \text{Car } A$.

On peut en fait montrer $WF(u) = \bigcap_{\substack{A \text{ pseudo diff} \\ \text{t.q. } Au \in C^\infty}} \text{Car } A$.

II.4) $\mathbb{F}$ est bicaractéristique.

Un symbole a est dit hyperbolique si $a = a_1 + a_0$

avec $a_1 \in S^1$ est imaginaire pur et $a_0 \in S^0$.

On considère $(a_t) : t \mapsto a_t \in S^1$ une fonction continue de symboles hyperboliques : on peut montrer (ALAZARD MICROLOCAL ANALYSIS p 102) que pour tout $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^m)$ et $f \in C^0([0, T], H^s(\mathbb{R}^m))$ le pb de Cauchy pseudodiff

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \text{Op}(a_t)u = f & \text{admet une unique solution} \\ u|_{t=0} = u_0 \end{cases} \quad u \in C^0([0, T], H^s) \cap C^1([0, T], H^{s-1})$$

Ex : on retrouve les équations de transport du chapitre 2

avec $a(x, \xi) = i\xi \cdot V(t, x)$ i.e.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + P_t(x, \partial_x)u = 0 & \text{où } P_t(x, \partial_x) = \sum_{j=1}^m V_j(t, x) \frac{\partial}{\partial x_j} \\ u|_{t=0} = u_0 \end{cases} \quad V_j \in C_b^\infty \text{ et à valeurs réelles}$$

Déf : Pour $b : \mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 , on pose

$$(x, \xi) \mapsto b(x, \xi)$$
$$H_b : \mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathbb{R}^{2m} \quad (x, \xi) \mapsto \begin{pmatrix} \nabla_\xi b \\ -\nabla_x b \end{pmatrix}$$

le champ hamiltonien de b .

Pour $(x_0, z_0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$, on pose $t \mapsto \Phi_{H_b}^t(x_0, z_0) = \begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$

l'unique solution maximale de
$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = H_b(x, z) \\ x(0) = x_0, z(0) = z_0. \end{cases}$$
 et on l'appelle flot bicaractéristique de b

Th Soit $a \in S^1$ hyperbolique ($a = a_1 + a_0$, a_1 imaginaire pur)

Soit $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^m)$ et $u \in C^0([0, T], L^2(\mathbb{R}^m))$ solution

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \text{Op}(a) u = 0 \\ u|_{t=0} = u_0. \end{cases}$$

Alors $\forall t \in [0, T], \text{WF}(u(t, \cdot)) = \Phi_H^t[\text{WF}(u_0)]$.

où H est le flot bicaractéristique associé à $\frac{1}{i} a_1$.

On ne montre pas ce résultat dans ces notes, l'objectif est surtout d'attester l'intérêt de l'ensemble WF .

Voir ALAZARD "Micro-local Analysis" p118 ou ALINHAC-GÉRARD p118

Ex1 Pour l'équation de transport $\frac{\partial u}{\partial t} + V(t, x) \cdot u(t, x) = 0$

le flot se réécrit
$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V(t, x) \\ -\nabla_x V(t, x) \cdot z \end{pmatrix}$$

qui est "découplée" on peut projeter sur l'axe des x . On remarque que les singularités en x se propagent selon le flot associé à V , ce qui s'observe via la sol explicite dans ce cadre $u(t, x) = u_0(\Phi_{-t}^V(x))$.

$$(x \in \text{supp sing}(u(t, \cdot)) \Leftrightarrow \Phi_{-t}^V(x) \in \text{supp sing } u_0 \Leftrightarrow x \in \Phi_t^V(\text{supp sing } u_0))$$

Ex2: Equation des ondes:
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 \text{ sur } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \\ u|_{t=0} = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = u_1. \end{cases}$$

On considère $\text{Op}(|z|)$ l'opérateur dont le symbole est $|z|$ (comme on précédemment, ce n'est pas tout à fait un opérateur pseudo-diff mais c'est le cas "à un opérateur de symbole à support compact près", qui sera régularisant: on va donc ignorer cette subtilité

et d'ailleurs on peut noter $\sqrt{-\Delta} = \text{Op}(|z|)$.

On va profiter de la simplicité calculatoire des opérateurs pseudo-diff

pour factoriser l'opérateur, comme on l'a fait dans le cas $n=1$.

On introduit

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} - i\sqrt{-\Delta} \right) v_+ = 0 \\ v_+|_{t=0} = u_0 - i(\sqrt{-\Delta})^{-1} u_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + i\sqrt{-\Delta} \right) v_- = 0 \\ v_-|_{t=0} = u_0 + i(\sqrt{-\Delta})^{-1} u_1 \end{cases}$$

Alors $u = \frac{1}{2}(v_+ + v_-)$ est la solution de l'équation des ondes car

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) u = \frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial t} + i\sqrt{-\Delta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - i\sqrt{-\Delta} \right) v_+}_{=0} + \frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial t} - i\sqrt{-\Delta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + i\sqrt{-\Delta} \right) v_-}_{=0} \\ u|_{t=0} = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_+}{\partial t}|_{t=0} + \frac{\partial v_-}{\partial t}|_{t=0} \right) = \frac{1}{2} \left[(i\sqrt{-\Delta}) v_+|_{t=0} - i\sqrt{-\Delta} v_-|_{t=0} \right] \\ = \frac{1}{2} \left(i\cancel{\sqrt{-\Delta}} u_0 + u_1 - i\cancel{\sqrt{-\Delta}} u_0 + u_1 \right) = u_1 \end{cases}$$

Les flots bicaractéristiques des deux pls de Cauchy ci-dessus s'écrivent

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mp \frac{z}{|z|} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ qui donnent } \begin{cases} x(t) = x_0 \mp t \frac{z_0}{|z_0|} \\ z(t) = z_0 \end{cases}$$

et donc $WF(u(t, \cdot)) = \left\{ \left(x_0 \pm t \frac{z_0}{|z_0|}, z_0 \right), (x_0, z_0) \in WF(u_0) \cup WF(u_1) \right\}$

- En particulier on observe que le support singulier se déplace dans les directions du front d'onde des conditions initiales, la connaissance de $\text{supp sing}(u_0, u_1)$ ne suffit pas.

Rq : on peut énoncer une version plus générale du th. de propagation des singularités :

Th : Soit $a \in S^m$ est un symbole d'ordre m et de symbole principal a_m soit à valeurs réelles (i.e. a_m homogène de degré m et $a - a_m \in S^{m-\delta}$)

On suppose $A(x, \partial)u = f$. Alors

$$(x_0, \xi_0) \in WF(u) \setminus WF(f) \Rightarrow \Phi_{H_{a_m}}^t(x_0, \xi_0) \in WF(u) \setminus WF(f)$$

où H_{a_m} est le flot bicaractéristique induit par a_m .

Par exemple si $f \in C^\infty$, on savait que $WF(u) \subset \text{Car } A$ (zéros de a_m) mais là on sait aussi que $WF(u)$ est invariant par le flot bicaractéristique

Conclusion du cours

Partie I

Exemples (Chap 1)

Partie II

qqs classes d'équations classiques
+ non linéarité
Chap 2.3.4

Partie III

Approche par l'analyse de Fourier
Chap 5.

- Les exemples, c'est important !
- L'analyse de Fourier sert dans certains contextes, mais pas tous !
(et ce n'est pas si simple, surtout qu'on n'a pas abordé les non linéarités)
- Les techniques d'analyse rencontrées :
 - Analyse complexe
 - Analyse fonctionnelle (méthodes hilbertiennes, th de point fixe, estimations a priori, compacité forte, faible)
 - Analyse de Fourier.

On s'est concentré sur 3 questions principales : existence, unicité, régularité, mais il y en a bien d'autres !

- stabilité par rapport aux données
- comportement des solutions (en l^∞ , propriétés de symétrie etc)
- Calcul numérique des solutions?